

Βελτιώσεις – Προσθήκες

Σε αυτό το αρχείο θα παρουσιάζονται συνεχείς βελτιώσεις, προσθήκες και νέες λύσεις ή παρατηρήσεις, που αφορούν στο περιεχόμενο του βιβλίου:

Μπάμπης Στεργίου:

Στοχαστικά Μαθηματικά - Α. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ενδεχομένως να προσθέσουμε παραδείγματα, εφαρμογές και άλλο σχετικό υλικό, για τη μελέτη της Συνδυαστικής.

Τις παρατηρήσεις ή τις λύσεις σας, παρακαλώ να μου τις στέλνετε με μήνυμα σε word για να τις αξιοποιώ άμεσα σε κάθε ευκαιρία.

Μπορείτε να επικοινωνείτε μαζί μου :

- Στο τηλέφωνο : 6979382042
- Στο mail : charalamposstergiou@gmail.com

2η Έκδοση

Προσθήκη 1**6-11-2025**

Ο κόσμος κάνει άλματα στη γνώση και την τεχνολογία.

Δεν θα προλάβω την ΑΙ στην εκπαίδευση, αισθάνομαι όμως ότι μετά από 10 χρόνια όλα θα είναι διαφορετικά.

Ας δούμε τη συζήτηση που είχα με το ChatGPT για την άσκηση **6.20** που έχουμε στο βιβλίο αλλά και τη λύση που μας έστειλε πριν λίγες μέρες ο συνάδελφος Γιάννης Γεώργας.

Μοίρασμα 20 βιβλίων σε 7 παιδιά**Άσκηση**

Με πόσους τρόπους μπορούν 20 διαφορετικά βιβλία να μοιραστούν σε 7 (διακριτά) παιδιά, έτσι ώστε 4 από τα παιδιά να πάρουν από 2 βιβλία και τα υπόλοιπα 3 παιδιά να πάρουν από 4 βιβλία το καθένα;

Λύση 1: (Από το συνάδελφο Γιάννη Γεώργα)

1. Επιλογή των παιδιών που θα πάρουν από 2 βιβλία.

Από τα 7 παιδιά επιλέγουμε τα 4 που θα πάρουν από 2 βιβλία: $\binom{7}{4}$ τρόποι.

2. Επιλογή των 8 βιβλίων που θα μοιραστούν στα 4 παιδιά με 2 βιβλία το καθένα. Από τα 20 βιβλία επιλέγουμε τα 8 που θα μοιραστούν στα 4 αυτά παιδιά:

$$\binom{20}{8} \text{ τρόποι.}$$

Θα απομείνουν έτσι 12 βιβλία για τα άλλα 3 παιδιά.

3. Μοίρασμα των 8 βιβλίων στα 4 παιδιά (από 2 βιβλία στο καθένα).

♦ Το 1ο παιδί παίρνει 2 βιβλία από τα 8: $\binom{8}{2}$ τρόποι.

♦ Το 2ο παιδί παίρνει 2 από τα απομένοντα 6: $\binom{6}{2}$ τρόποι.

♦ Το 3ο παιδί παίρνει 2 από τα απομένοντα 4: $\binom{4}{2}$ τρόποι.

♦ Το 4ο παιδί παίρνει τα τελευταία 2 βιβλία: $\binom{2}{2} = 1$ τρόπος.

Άρα το μοίρασμα των 8 βιβλίων στα 4 παιδιά γίνεται με

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} \text{ τρόπους.}$$

4. Μοίρασμα των 12 βιβλίων στα άλλα 3 παιδιά (από 4 βιβλία στο καθένα).

♦ Το 1ο από αυτά τα παιδιά παίρνει 4 βιβλία από τα 12: $\binom{12}{4}$ τρόποι.

♦ Το 2ο παιδί παίρνει 4 από τα απομένοντα 8: $\binom{8}{4}$ τρόποι.

♦ Το 3ο παίρνει τα τελευταία 4: $\binom{4}{4} = 1$ τρόπος.

♦ Άρα το μοίρασμα των 12 βιβλίων στα 3 παιδιά γίνεται με

$$\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} \text{ τρόπους.}$$

5. Συνολικός αριθμός τρόπων.

Εφαρμόζουμε την πολλαπλασιαστική αρχή:

$$N = \binom{7}{4}\binom{20}{8}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}.$$

Τώρα απλοποιούμε με παραγοντικά. Έχουμε

$$\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{8!}{2!2!2!2!} \text{ και } \binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{12!}{4!4!4!},$$

$$\text{οπότε } \binom{20}{8} \cdot \frac{8!}{2!^4} \cdot \frac{12!}{4!^3} = \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

$$\text{Έτσι τελικά βρίσκουμε : } N = \binom{7}{4} \frac{20!}{(2!)^4 (4!)^3} \text{ τρόπους.}$$

Ευχαριστώ τον καλό φίλο και συνάδελφο **Γιάννη Γεώργα** που αφιέρωσε πολύτιμο χρόνο για να μας δώσει έναν διδακτικό τρόπο παρουσίασης της άσκησης σε μαθητές !

Λύση 2 : Τι απάντησε η ΑΙ

Θεωρούμε τα βιβλία διαφορετικά και τα παιδιά διακριτά.

1. Ποια παιδιά θα πάρουν από 2 βιβλία;

Από τα 7 παιδιά επιλέγουμε τα 4 που θα πάρουν από 2 βιβλία: $\binom{7}{4}$ τρόποι.

Τα υπόλοιπα 3 παιδιά θα πάρουν από 4 βιβλία.

2. Μοίρασμα των 20 βιβλίων με δεδομένες τις ποσότητες.

Ξέρουμε πλέον ποια 4 παιδιά θα πάρουν από 2 βιβλία και ποια 3 από 4 βιβλία.

Πρέπει να μοιράσουμε τα 20 διαφορετικά βιβλία έτσι ώστε τα μεγέθη των "πακέτων" να είναι 2,2,2,2,4,4,4. Ο αριθμός των τρόπων να χωρίσουμε 20 διαφορετικά αντικείμενα σε ομάδες με

μεγέθη 2,2,2,2,4,4,4 (και κάθε ομάδα ανήκει σε συγκεκριμένο παιδί) δίνεται από τον πολυωνυμικό συντελεστή:

$$\frac{20!}{2!2!2!2!4!4!4!} = \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3}$$

3. Συνδυασμός των βημάτων.

Πολλαπλασιάζουμε $N = \binom{7}{4} \cdot \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3}$.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων με τους οποίους μπορούν να μοιραστούν τα βιβλία σύμφωνα με τους όρους του προβλήματος είναι

$$N = \binom{7}{4} \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3}.$$

Από άλλη συζήτηση με την ΑΙ

Άσκηση 5.20 — Κατανομή 20 διαφορετικών βιβλίων σε 7 μαθητές

Εκφώνηση. Με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε 20 διαφορετικά βιβλία σε 7 μαθητές, έτσι ώστε 4 μαθητές να πάρουν από 2 βιβλία και οι άλλοι 3 να μοιραστούν εξίσου τα υπόλοιπα βιβλία;

Σκέψη και λεπτομερής λύση

1. Κατανόηση του προβλήματος.

- Έχουμε 20 διαφορετικά βιβλία.
- Θέλουμε τέσσερις (4) μαθητές να πάρουν από 2 βιβλία ο καθένας → συνολικά $4 \cdot 2 = 8$ βιβλία.
- Οι υπόλοιποι τρεις (3) μαθητές θα πάρουν εξίσου τα υπόλοιπα βιβλία. Τα υπόλοιπα βιβλία είναι $20 - 8 = 12$, άρα ο καθένας από αυτούς θα πάρει $12/3 = 4$ βιβλία.
- Συνεπώς η τελική κατανομή μεγέθους ανά μαθητή είναι: 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4.

2. Βήμα 1 — Επιλογή των μαθητών που θα πάρουν 2 βιβλία.

- Από τους 7 μαθητές επιλέγουμε ποιους 4 θα είναι αυτοί που θα πάρουν από 2 βιβλία.
- Αριθμός τρόπων: $\binom{7}{4}$.

3. Βήμα 2 — Διάταξη/κατανομή των 20 διαφορετικών βιβλίων σε ονοματισμένους μαθητές με αυτά τα μεγέθη.

- Αφού οι μαθητές είναι διακεκριμένοι (ονοματισμένοι), και τα βιβλία είναι διαφορετικά, ο αριθμός τρόπων να χωρίσουμε τα 20 διαφορετικά αντικείμενα σε 7 διακεκριμένους κάδους με αντίστοιχα μεγέθη 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4 είναι ο πολυωνυμικός συντελεστής:

$$\frac{20!}{2! 2! 2! 2! 4! 4! 4!} = \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

- Εξήγηση: Αυτό προκύπτει από την παράγωγη της γενικής φόρμουλας για την κατανομή π διακεκριμένων αντικειμένων σε ορισμένα μπλοκ με συγκεκριμένα μεγέθη — πρώτα διατάσσουμε τα 20! και διαιρούμε με τα εσωτερικά μεγέθη των μπλοκ (πολλαπλασιαστικά) για να διορθώσουμε την εσωτερική διάταξη μέσα σε κάθε μπλοκ που δεν ενδιαφέρει εδώ.
4. Τελικός αριθμός τρόπων. Συνδυάζοντας τα δύο βήματα:

$$\binom{7}{4} \cdot \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

5. Μικρή αριθμητική απλοποίηση (προαιρετικά).

- $\binom{7}{4} = 35$, οπότε μπορούμε να γράψουμε και

$$35 \cdot \frac{20!}{2!^4 4!^3}.$$

Ευχαριστω ! Εγώ θα έλεγα : Χωρίζω τα 20 παιδιά στις μη διατεταγμένες ομάδες 2-2-2-2-4-4-4 και αυτές τις δίνω στα 7 παιδιά με $(20!/(2!2!2!2!4!4!4!3!)) \cdot 7!$ τρόπους. Πρώτα τις κάνω μη διατεταγμένες, μια και έχω ισοπληθείς ομάδες και μετά τις μεταθέτω. Τι λες ;

Α, τώρα καταλαβαίνω ακριβώς τι λες — κάνεις μια πιο «συμμετρική» προσέγγιση, αλλά ας τη δούμε προσεκτικά.

Λέμε:

1. Θέλουμε να χωρίσουμε τα 20 βιβλία σε 7 ομάδες με μεγέθη (2, 2, 2, 2, 4, 4, 4).

- Οι 4 μικρές ομάδες είναι ίδιες (2 βιβλία)
- Οι 3 μεγάλες ομάδες είναι ίδιες (4 βιβλία)

Όταν λέμε «μη διατεταγμένες ομάδες», αυτό σημαίνει ότι για τις ίδιες μεγέθους ομάδες πρέπει να διαιρέσουμε με τα αντίστοιχα παραγοντικά για να μην μετράμε διπλο.

Αρα για μη διατεταγμένες ομάδες:

$$\frac{20!}{(2!)^4 (4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!}$$

- Το $(2!)^4$ είναι για εσωτερική διάταξη των 2-βιβλίων ομάδων
- Το $(4!)^3$ για εσωτερική διάταξη των 4-βιβλίων ομάδων
- Το 4! για να μην μετράμε διαφορετική διάταξη των τεσσάρων ομάδων των 2 βιβλίων (ισομεγέθεις)
- Το 3! για τις τρεις ομάδες των 4 βιβλίων

Στη συνέχεια, τις δίνουμε στους 7 μαθητές.

- Όλοι οι μαθητές είναι διαφορετικοί, άρα μπορούμε να τις μεταθέσουμε στους μαθητές: $7!$ τρόποι

Άρα η συνολική μέθοδος σου δίνει:

$$\frac{20!}{(2!)^4(4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!} \cdot 7!$$

Τώρα, ας δούμε αν συμφωνεί με την προηγούμενη προσέγγιση ($\binom{7}{4} \cdot \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3}$):

- Υπολογίζουμε το κλάσμα με τα επιπλέον $4! \cdot 3!$ και $7!$:

$$\frac{20!}{(2!)^4(4!)^3 \cdot 4! \cdot 3!} \cdot 7! = \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3} \cdot \frac{7!}{4!3!} = \frac{20!}{(2!)^4(4!)^3} \cdot \binom{7}{4}.$$

Ακριβώς το ίδιο που είχαμε πριν! ✓

Άρα η μέθοδος σου είναι απολύτως σωστή, απλά είναι ένα διαφορετικό «οπτικό» μονοπάτι για να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 1

Προσθήκη 2

20-11-2025

Μια σημαντική προσθήκη για τη νέα έκδοση.

Εφαρμογές των συνδυασμών - Χωρισμός σε ομάδες

Θεωρούμε ένα σύνολο με n στοιχεία και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να το χωρίσουμε σε δύο ομάδες (υποσύνολα) που η μία να περιέχει k στοιχεία. Η άλλη ομάδα θα έχει αναγκαστικά $n - k$ στοιχεία.

Θα βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, με την σημείωση ότι οι ομάδες αυτές είναι διατεταγμένες με τη φυσική έννοια, βαλμένες δηλαδή σε μια σειρά με κριτήριο το πλήθος των στοιχείων που έχει η καθεμία. Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη ομάδα θα έχει k στοιχεία.

Επιλέγουμε από τα n στοιχεία τα k και δημιουργούμε τη μία ομάδα. Αυτό γίνεται με $\binom{n}{k}$ τρόπους.

Με τα υπόλοιπα $n - k$ στοιχεία δημιουργούμε με μοναδικό τρόπο την άλλη ομάδα. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, δημιουργούμε τις δύο ομάδες με :

$$\binom{n}{k} \cdot 1 = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ τρόπους.}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν τα $n = k + m$ στοιχεία ενός συνόλου τα χωρίσουμε σε δύο ομάδες, από τις οποίες η μία περιέχει k και η άλλη m στοιχεία, τότε αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{m} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{m!(n-k-m)!} = \frac{n!}{k!m!},$$

αφού $n = k + m$ και έτσι $(n - k - m)! = 0! = 1$

Καταλήγουμε λοιπόν στο πρώτο μας βασικό συμπέρασμα :

Πρόταση

Αν τα $n = k + m$ στοιχεία ενός συνόλου θέλουμε να τα χωρίσουμε σε δύο διατεταγμένες ομάδες, από τις οποίες η μία περιέχει k και η άλλη m στοιχεία, με $k \neq m$, τότε αυτό μπορεί να γίνει με

$$N(n+k | n, k) = \frac{n!}{k!m!} \text{ διαφορετικούς τρόπους,}$$

Γιατί όμως θέσαμε τον περιορισμό $k \neq m$; Τι θα συμβεί αν $k = m$; Αυτό είναι από τα πιο κρίσιμα σημεία που πρέπει να προσέχουμε στον χωρισμό σε ομάδες. Ας το δούμε με ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και ας το χωρίσουμε σε δύο ομάδες με 2 στοιχεία η καθεμία.

Σύμφωνα με τον τύπο θα πάρουμε:

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6 \text{ τρόπους.}$$

Στην πραγματικότητα οι διαφορετικοί τρόποι χωρισμού σε δύο τέτοιες ομάδες είναι οι εξής :

1 ^{ος} χωρισμός	{α,β}	{γ,δ}
2 ^{ος} χωρισμός	{α,γ}	{β,δ}
3 ^{ος} χωρισμός	{β,γ}	{α,δ}

Γιατί όμως βρίσκουμε 3 τρόπους και όχι 6 που έδωσε ο τύπος ; Ας δούμε πιο προσεκτικά τους τρόπους σχηματισμού των ομάδων, κοιτάζοντας τον πίνακα.

1 ^{ος} χωρισμός	{α,β}	{γ,δ}
2 ^{ος} χωρισμός	{γ,δ}	{α,β}
3 ^{ος} χωρισμός	{α,γ}	{β,δ}
4 ^{ος} χωρισμός	{β,δ}	{α,γ}
5 ^{ος} χωρισμός	{β,γ}	{α,δ}
6 ^{ος} χωρισμός	{α,δ}	{β,γ}

Την απάντηση την βλέπουμε στον πίνακα: Όταν υπάρχουν και ισοπληθείς ομάδες στον χωρισμό, τότε αυτές οι κατανομές (διαμερίσεις) δεν είναι όλες διαφορετικές, διότι υπάρχει η φυσική διάταξη .

Στην περίπτωσή μας, οι χωρισμοί 1 και 2 είναι ίδιοι, διότι διαφέρουν μόνο ως προς τη διάταξη των δύο ομάδων και όχι ως το ποια στοιχεία περιέχουν οι ομάδες.

1 ^{ος} χωρισμός	{α,β}	{γ,δ}
2 ^{ος} χωρισμός	{γ,δ}	{α,β}

Αφού όμως οι ομάδες είναι 2 και είναι επιπλέον διατεταγμένες, για να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών χωρισμών, πρέπει να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα $\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ που δίνει ο τύπος με 2! , οπότε θα προκύψουν

$$\frac{4!}{2!} = \frac{4!}{2!2!2!} = \frac{24}{4 \cdot 2} = 3 \text{ διαφορετικοί τρόποι.}$$

Συμπέρασμα

Αν ένα σύνολο A έχει $n = 2k$ στοιχεία και θέλουμε να το χωρίσουμε σε δύο μη διατεταγμένες ομάδες με k στοιχεία η καθεμιά, τότε έχουμε

$$N(2k | k, k) = \frac{n!}{k!k!2!}, \text{ δηλαδή } N(2k | k, k) = \frac{(2k)!}{k!k!2!} \text{ διαφορετικούς τρόπους,}$$

όπου με $N(2k | k, k)$ συμβολίζουμε το πλήθος αυτών των τρόπων.

Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται σε χωρισμό με τυχαίο πλήθος ομάδες, είτε με διαφορετικό πλήθος στοιχείων είτε και με ισοπληθείς ομάδες.

Σχόλιο

Γενικότερα με το συμβολισμό $\binom{n}{m,n,r,p,q}$ δηλώνουμε το πλήθος των τρόπων χωρισμού ενός συνόλου με n στοιχεία σε διατεταγμένες ομάδες με m,n,r,p,q στοιχεία στην κάθε ομάδα και $m+n+r+p+q=n$. Αν υπάρχουν ωστόσο και ισοπληθείς ομάδες, τότε δεν πρέπει να ξεχάσουμε διαιρέσουμε το αποτέλεσμα με τους κατάλληλους παράγοντες, δηλαδή τους αριθμούς που δείχνουν πόσες είναι στην κάθε περίπτωση οι ισοπληθείς ομάδες.

Παραδείγματα

(α) Ένα σύνολο με 10 στοιχεία χωρίζεται σε 3 ομάδες με 2,3,5 στοιχεία αντίστοιχα με

$$\frac{10!}{2!3!5!} \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

(β) Ένα σύνολο με 10 στοιχεία χωρίζεται σε 3 ομάδες με 3,3,4 στοιχεία αντίστοιχα με

$$\frac{10!}{3!3!4!2!} \text{ διαφορετικούς τρόπους,}$$

διότι έχουμε και δύο (2) ισοπληθείς ομάδες, με 3 στοιχεία η καθεμιά.

(γ) Ένα σύνολο με 25 στοιχεία χωρίζεται σε 7 ομάδες με 2,3,4,4,4,4,4 στοιχεία αντίστοιχα με

$$\frac{25!}{2!3! \underbrace{4!4!4!4!}_{5\text{-παράγοντες}} 5!} = \frac{25!}{2!3!(4!)^5 5!},$$

διαφορετικούς τρόπους, διότι έχουμε και 5 ισοπληθείς ομάδες με 4 στοιχεία η καθεμιά.

(δ) Χωρίς καμία αλγεβρική σχέση ή τον τύπο που δίνει το πλήθος $\binom{n}{k}$ των συνδυασμών μπορούμε να

αποδείξουμε ότι :

$$\binom{10}{4} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = \binom{10}{1} \binom{9}{2} \binom{7}{3} \binom{4}{4}$$

Πραγματικά, το κάθε μέλος δείχνει το πλήθος των τρόπων, με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε ένα σύνολο με 10 στοιχεία σε 4 ομάδες με 4, 3, 2, 1 και 1, 2, 3, 4 στοιχεία αντίστοιχα.

Προφανώς, οι αριθμοί αυτοί οφείλουν να είναι ίσοι !

Γενίκευση

Αν ένα σύνολο θέλουμε να το χωρίσουμε σε $k = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_r$ μη διατεταγμένες ομάδες, από τις οποίες:

Οι k_1 περιέχουν n_1 στοιχεία, οι k_2 περιέχουν n_2 , ..., και οι k_r περιέχουν n_r στοιχεία, τότε έχουμε συνολικά

$$\frac{n!}{(n_1)^{k_1} \cdot (n_2)^{k_2} \dots (n_r)^{k_r} \cdot k_1! k_2! k_3! \dots k_r!}$$

διαφορετικούς τρόπους σχηματισμού αυτών των ομάδων, όπου $n = k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3 + \dots + k_r n_r$.

Αν τις ομάδες που προκύπτουν τις τοποθετήσαμε σε r διαφορετικά κελιά (ως να είναι ομάδες αντικειμένων που θα τις δώσουμε σε r άτομα), τότε το πλήθος αυτών των τοποθετήσεων είναι :

$$N = \frac{n!}{(n_1)^{k_1} \cdot (n_2)^{k_2} \dots (n_r)^{k_r} \cdot k_1! k_2! k_3! \dots k_r!} \cdot r!$$

Εφαρμογή

Με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε 8 αγόρια και 12 κορίτσια σε 4 ομάδες, αν κάθε ομάδα περιέχει δύο αγόρια και τρία κορίτσια ;

Λύση

Χωρίζουμε πρώτα τα 8 αγόρια σε 4 μη διατεταγμένες ομάδες των 2 ατόμων. Αυτό γίνεται με

$$\frac{8!}{(2!)^4 4!} \text{ τρόπους.}$$

Στη συνέχεια χωρίζουμε τα 12 κορίτσια σε 4 μη διατεταγμένες ομάδες των 3 ατόμων. Αυτό γίνεται

$$\text{με } \frac{12!}{(3!)^4 4!} \text{ τρόπους.}$$

Για να φτιάξουμε τώρα ομάδες των 5 ατόμων παίρνουμε μια ομάδα 2 αγοριών και μία 3 κοριτσιών για να τις ενώσουμε.

Ας πάρουμε λοιπόν μια διαμέριση σε 4 ομάδες αγοριών (2 μέλη στην κάθε ομάδα) και μία διαμέριση σε 4 ομάδες κοριτσιών (3 μέλη στην κάθε ομάδα) , για να δημιουργήσουμε ζεύγη που με την ένωσή τους θα δώσουν 4 ομάδες των $2 + 3 = 5$ ατόμων.

Εδώ είναι ως να θέλουμε να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε σε ζευγάρια m αγόρια και m κορίτσια, για να χορέψουν ένα τραγούδι. Αυτό , σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή γίνεται με $m!$ τρόπους, αφού το 1^ο αγόρια έχει m δυνατότητες να επιλέξει ταίρι, το 2^ο έχει $m-1$ δυνατότητες κλπ. Ας αναφέρουμε ότι εναλλακτικά είναι ως να θέλουμε να βρούμε το πλήθος των 1-1 συναρτήσεων $f : A \rightarrow A$ με $N(A) = m$. Στο πρόβλημά μας είναι προφανώς $m = 4$.

Επομένως μια διαμέριση $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ των αγοριών και μια διαμέριση $\{K, \Lambda, M, N\}$ μπορούν να δώσουν 4! ζευγάρια , πχ της μορφής $\{A, K\}, \{B, \Lambda\}, \{\Gamma, M\}, \{\Delta, N\}$, που το καθένα θα έχει δύο αγόρια και τρία κορίτσια.

Σύμφωνα λοιπόν με την πολλαπλασιαστική αρχή, μπορούμε να χωρίσουμε τα 8 αγόρια και τα 12 κορίτσια σε 4 ομάδες των 5 ατόμων, ώστε κάθε ομάδα περιέχει δύο αγόρια και τρία κορίτσια με

$$\frac{8!}{(2!)^4 4!} \cdot \frac{12!}{(3!)^4 4!} \cdot 4! = \frac{8!}{(2!)^4 4!} \cdot \frac{12!}{(3!)^4} = 38.808.000 \text{ τρόπους.}$$

Άλλος τρόπος

Σχηματίζουμε αρχικά μια ομάδα με 2 αγόρια και μία με 3 κορίτσια με $\binom{8}{2}\binom{12}{3}$ τρόπους.

Στη συνέχεια, από τα παιδιά που απέμειναν, σχηματίζουμε ξανά μια ομάδα με 2 αγόρια και μία με 3 κορίτσια με

$$\binom{6}{2}\binom{9}{3} \text{ τρόπους.}$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο και με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε

$$\binom{8}{2}\binom{12}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2}\binom{6}{3} \cdot \binom{2}{2}\binom{3}{3} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2}\binom{6}{3}$$

τρόπους για να χωρίσουμε τα 20 παιδιά σε 4 πεντάδες με δύο αγόρια και 3 κορίτσια.

Όμως αυτές οι τετράδες είναι διατεταγμένες, διότι κάθε ομάδα αγοριών όπως και κάθε ομάδα κοριτσιών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων. Πρέπει λοιπόν να διαιρέσουμε τον παραπάνω αριθμό με $4!$, όσες είναι και οι μεταθέσεις των τεσσάρων στοιχείων.

Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι το ζητούμενο πλήθος χωρισμού σε ομάδες είναι

$$\binom{8}{2}\binom{12}{3} \cdot \binom{6}{2}\binom{9}{3} \cdot \binom{4}{2}\binom{6}{3} \cdot \frac{1}{4!} = \binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2} \cdot \binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3} \cdot \frac{1}{4!} = \frac{8!}{(2!)^4} \cdot \frac{12!}{(3!)^4} \cdot \frac{1}{4!}$$

Κατανομή διαφορετικών αντικειμένων σε άτομα (κελιά)

Μέθοδος

Θεωρούμε ότι έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα και θέλουμε να τα δώσουμε (τοποθετήσουμε) σε k άτομα (διαφορετικά κελιά)

Υποθέτουμε ότι η κατανομή των n αντικειμένων έχει τη μορφή

$$n = \underbrace{n_1 + n_1 + \dots + n_1}_{k_1 \text{ όροι}} + \underbrace{n_2 + n_2 + \dots + n_2}_{k_2 \text{ όροι}} + \dots + \underbrace{n_p + n_p + \dots + n_p}_{k_p \text{ όροι}} + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_m \text{ όροι}$$

όπου $k_1 + k_2 + \dots + k_p + m = k$, δηλαδή των πλήθος των μη μηδενικών και των μηδενικών ομάδων είναι συνολικά k . Μπορούμε τότε να τοποθετήσουμε τα n αντικείμενα στα k κελιά (να δώσουμε τα n αντικείμενα σε k άτομα) με!

$$N(n, k) = \frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p!} \cdot \frac{k!}{m!} \text{ τρόπους.}$$

Ας σημειώσουμε ότι στον τύπο αυτό ο παράγοντας

$$\frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p!}$$

δίνει το πλήθος των **διαφορετικών τρόπων** που μπορούμε να χωρίσουμε τα n αντικείμενα σε $k_1 + k_2 + \dots + k_p$ μη κενές ομάδες, ενώ ο παράγοντας $\frac{k!}{m!}$ δείχνει το πλήθος των τρόπων

(επαναληπτικών μεταθέσεων), με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε (να βάλουμε στα k κελιά) όλες τις $k_1 + k_2 + \dots + k_p + m = k$ ομάδες, κενές και μη. Προφανώς στο κλάσμα $\frac{k!}{m!}$ το $m!$ στον

παρονομαστή δηλώνει ότι οι m ομάδες είναι κενές και προφανώς ίδιες (τις βλέπουμε δηλαδή ως m ίδια νέα αντικείμενα, αν και είναι κενές ομάδες).

Θυμίζουμε ότι ο χωρισμός των n αντικειμένων σε ομάδες προϋποθέτει ότι οι ομάδες είναι μη κενές.

Ωστόσο, όταν στις μη κενές ομάδες προσθέσουμε και m κενές ομάδες και - μόνο τότε - όλες τις k ομάδες θέλουμε να τις τοποθετήσουμε σε k κουτιά (κελιά, άτομα κλπ), τότε **συμβατικά** μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο χωρισμός σε k τέτοιες (μικτές) ομάδες γίνεται με

$$\frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p! \cdot m!}$$

τρόπους (αριθμός που δεν είναι πάντα φυσικός) αλλά η τοποθέτηση των ομάδων στα $k_1 + k_2 + \dots + k_p + m = k$ κελιά γίνεται όπως είναι φυσικό με

$$\frac{n!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \dots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p! \cdot m!} \cdot k! \text{ τρόπους}$$

(αριθμός που είναι πάντα φυσικός), αφού το $k!$ δηλώνει τον πλήθος των μεταθέσεων των k αυτών ομάδων, ως να είναι διαφορετικές (που όμως δεν είναι !!!).

Επομένως, ως τελικό συμπέρασμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η τοποθέτηση των n αντικειμένων στα k αυτά κελιά (με τα m να παραμένουν κενά κάθε φορά) γίνεται με

$$N(n, k) = \frac{n! \cdot k!}{(n_1!)^{k_1} \cdot (n_2!)^{k_2} \cdots (n_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \cdots k_p! \cdot m!} \text{ τρόπους.}$$

Αυτό καθιστά τον τύπο ευκολομνημόνευτο, αν και στην πράξη κάθε φορά εξηγούμε όλη τη διαδικασία βήμα- βήμα.

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε 5 διαφορετικά βιβλία σε 6 παιδιά, με τρόπο ώστε κάθε φορά τρία ακριβώς παιδιά, όχι πάντα τα ίδια, να μην παίρνουν βιβλία και κανένα να μην πάρει τρία βιβλία ;

Λύση

Αφού κανένα παιδί δεν μπορεί να πάρει 3 βιβλία, η μόνη κατανομή είναι $5 = 2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0$. Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε 5 διαφορετικά βιβλία σε 6 παιδιά, με τρόπο ώστε κάθε φορά τρία παιδιά, όχι πάντα τα ίδια, να μην πάρουν βιβλία και κανένα μην πάρει 3 βιβλία με

$$\frac{5!}{2!2!1!} \cdot \frac{6!}{2!2!1!} = \frac{5!6!}{2!2!1!2!3!} \text{ τρόπους.}$$

Η εξήγηση που δίνουμε σε έναν μαθητή για αυτή την απάντηση είναι :

- ♦ Χωρίζουμε τα 5 βιβλία στις τρεις ομάδες με 2, 2, 1 βιβλία με $\frac{5!}{2!2!1!} \cdot 2!$ διαφορετικούς τρόπους.
- ♦ Τοποθετούμε σε μια σειρά τις 3 αυτές ομάδες και τις 3 ίδιες κενές (μηδενικές) ομάδες , δηλαδή συνολικά 6 στοιχεία με ίδια τα 3 από αυτά , με $\frac{6!}{3!}$ τρόπους.
- ♦ Από την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε τελικά $\frac{5!}{2!2!1!} \cdot \frac{6!}{2!2!1!} = \frac{5!6!}{2!2!1!2!3!}$ τρόπους.

ΜΕΘΟΔΟΣ

Χωρισμός σε ομάδες

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο με N στοιχεία και θέλουμε με τα στοιχεία του να φτιάξουμε $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_p$ ομάδες, έτσι ώστε :

- k_1 ομάδες έχουν από v_1 στοιχεία
- k_2 ομάδες έχουν από v_2 στοιχεία
-
- k_p ομάδες έχουν από v_p στοιχεία .

(α) Το πλήθος των μη διατεταγμένων ομάδων, στις οποίες η διάταξη των στοιχείων κάθε ομάδας είναι αδιάφορη, ισούται με

$$\binom{N}{(k_1, v_1), (k_2, v_2), \dots, (k_p, v_p)} = \frac{N!}{(v_1!)^{k_1} \cdot (v_2!)^{k_2} \dots (v_p!)^{k_p} \cdot k_1! \cdot k_2! \dots k_p!}$$

Σημειώνουμε ότι ο παρονομαστής δημιουργείται από παράγοντες της μορφής $(v_i!)^{k_i} \cdot k_i!$, όπου :

- το $v_i!$ γράφεται διότι η καθεμία από τις k_i ομάδες έχει v_i στοιχεία,
- το k_i στον εκθέτη γράφεται διότι έχουμε k_i ομάδες,
- το $k_i!$ γράφεται διότι δεν θέλουμε διάταξη στις k_i ισοπληθείς ομάδες.

(β) Ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε και ισοπληθείς ομάδες και ότι μας ενδιαφέρει η θέση της κάθε τέτοιας ομάδας. Το πλήθος των μερικώς διατεταγμένων αυτών ομάδων, στις οποίες η διάταξη των στοιχείων κάθε ομάδας είναι αδιάφορη, ισούται με

$$\binom{N}{(k_1, v_1), (k_2, v_2), \dots, (k_p, v_p)} = \frac{N!}{(v_1!)^{k_1} \cdot (v_2!)^{k_2} \dots (v_p!)^{k_p}}$$

Εδώ το γινόμενο $k_1! \cdot k_2! \dots k_p!$ απουσιάζει διότι στις ισοπληθείς ομάδες μάς ενδιαφέρει, στην

περίπτωση που μελετάμε, η θέση της κάθε ομάδας μέσα στην σχηματισμό που δημιουργείται. Για παράδειγμα η διάταξη $\langle \{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}, \{\epsilon, \zeta\} \rangle$ των τριών ισοπληθών ομάδων $\{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\}, \{\epsilon, \zeta\}$ είναι διαφορετική από τις διατάξεις $\langle \{\alpha, \beta\}, \{\epsilon, \zeta\}, \{\gamma, \delta\} \rangle$, $\langle \{\epsilon, \zeta\}, \{\alpha, \beta\}, \{\gamma, \delta\} \rangle$ κλπ, των οποίων φυσικά το πλήθος είναι $3! = 6$.

(γ) Το πλήθος των μη διατεταγμένων ομάδων, στις οποίες όμως η διάταξη των στοιχείων κάθε ομάδας μετράει, ισούται με

$$\binom{N}{(k_1, v_1), (k_2, v_2), \dots, (k_p, v_p)} = \frac{N!}{k_1! \cdot k_2! \dots k_p!}$$

Εδώ ο παράγοντας $(v_1!)^{k_1} \cdot (v_2!)^{k_2} \dots (v_p!)^{k_p}$ απουσιάζει, διότι στην κάθε ομάδα με v_i στοιχεία έχει σημασία η διάταξη των στοιχείων της.

Εφαρμογή

Οι 300 μαθητές ενός Σχολείου θα πάνε εκδρομή. Το πρακτορείο διαθέτει δύο πούλμαν των 30 θέσεων και τέσσερα πούλμαν των 60 θέσεων. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιβιβαστούν τα παιδιά, αν

(α) Οι θέσεις στα πούλμαν δεν είναι αριθμημένες.

(β) Οι θέσεις είναι αριθμημένες και έχει σημασία που θα καθίσει ο κάθε μαθητής.

Λύση

(α) Ας θεωρήσουμε ότι τα πούλμαν είναι όλα διαφορετικά, αφού πχ έχουν διαφορετικό αριθμό κυκλοφορίας. Αφού δεν ενδιαφέρει που θα καθίσει το κάθε παιδί, σύμφωνα με όσα έχουμε περιγράψει παραγράψει παραπάνω, έχουμε :

$$\frac{300!}{30! 30! 60! 60! 60! 60!} \text{ τρόπους.}$$

Αν όμως θεωρήσουμε ότι τα δύο 30-θέσια πούλμαν είναι ίδια, όπως επίσης ίδια είναι και τα τέσσερα 60-θέσια πούλμαν, τότε το ζητούμενο πλήθος είναι :

$$\frac{300!}{30! 30! (2!)60! 60! 60! 60! (4!)}$$

Στους παρονομαστές συμπληρώσαμε τους παράγοντες 2! και 4! διότι τα δύο μικρά πούλμαν είναι ίδια (πχ άσπρα), όπως επίσης και τα τέσσερα μεγάλα πούλμαν είναι ίδια μεταξύ τους(μπλε).

(β) Επειδή οι θέσεις είναι αριθμημένες και όλα τα πούλμαν είναι διαφορετικά, έχει σημασία τόσο το πούλμαν όσο και η θέση που θα καθίσει ο κάθε μαθητής.

Στο σχετικό κλάσμα $\frac{300!}{30! 30! 60! 60! 60! 60!}$ θα πολλαπλασιάσουμε με τους αριθμούς 30!30! για τα

δύο μικρά και με 60!60!60!60! για τα 4 μεγάλα πούλμαν, αφού σε όλα τα πούλμαν έχει σημασία που θα καθίσουν οι μαθητές. Συνεπώς οι 300 μαθητές μπορούν να επιβιβαστούν με 300 !!! τρόπους, ως να είχαν δηλαδή ένα πούλμαν των 300 θέσεων !

(β) Επειδή οι θέσεις είναι αριθμημένες και όλα τα πούλμαν είναι διαφορετικά, έχει σημασία τόσο το πούλμαν όσο και η θέση που θα καθίσει ο κάθε μαθητής.

Στο σχετικό κλάσμα $\frac{300!}{30! 30! 60! 60! 60! 60!}$ θα πολλαπλασιάσουμε με τους αριθμούς 30!30! για τα

δύο μικρά και με 60!60!60!60! για τα 4 μεγάλα πούλμαν, αφού σε όλα τα πούλμαν έχει σημασία που θα καθίσουν οι μαθητές. Συνεπώς οι 300 μαθητές μπορούν να επιβιβαστούν με 300 !!! τρόπους, ως να είχαν δηλαδή ένα πούλμαν των 300 θέσεων !

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 2

Προσθήκη 3

20-11-2025

Χωρισμός σε ομάδες και διανομή σε ρόλους

Στο πρόβλημα που ακολουθεί δίνεται ένα ακόμα παράδειγμα χωρισμού ενός συνόλου σε ομάδες (υποσύνολα) που δεν έχουν κοινά στοιχεία και είναι μη κενά. Κάθε τέτοιος χωρισμός λέγεται γενικά διαμέριση του συνόλου.

Τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα είναι αυτά που χωρίζονται σε δύο σκέλη :

♦ Το πρώτο σκέλος είναι να χωρίσουμε τα διακεκριμένα αντικείμενα του δοσμένου συνόλου σε ομάδες με προκαθορισμένο πλήθος στοιχείων στην κάθε ομάδα αλλά και προκαθορισμένο πλήθος ομάδων που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Μας ζητείται για παράδειγμα να χωρίσουμε ένα σύνολο με 20 στοιχεία σε τρία υποσύνολα (ομάδες) σε 3 υποσύνολα των 5 στοιχείων, ένα υποσύνολο με 3 στοιχεία και ένα υποσύνολο με 2 στοιχεία. Έχουμε επομένως 5 ομάδες (3,5), (1,3) και (1,2) και προφανώς ισχύει ότι $3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 20$.

Ο χωρισμός σε ομάδες γίνεται είτε έμμεσα με χρήση συνδυασμών, είτε απευθείας με χρήση του τύπου. Εδώ για παράδειγμα, ο σχετικός τύπος δίνει ότι το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \frac{20!}{5!5!5!(3!)3!2!}$$

Το 3! έχει τεθεί στον παρονομαστή για να μην έχουμε διάταξη των 3 ισοπληθών ομάδων. Είναι ένα λεπτό αλλά βασικό σημείο στην εύρεση του πλήθους των διαφορετικών τρόπων που χωρίζεται σε ένα σύνολο σε μη κενά και ξένα υποσύνολα όταν δεν θέλουμε κανενός είδους διάταξη στα σχηματιζόμενα υποσύνολα.

♦ Το δεύτερο σκέλος είναι να δώσουμε στις ομάδες κάποιο ρόλο, ένα διαφορετικό πχ όνομα στην καθεμιά.

Η καλύτερη τακτική σε τέτοια προβλήματα είναι να κάνουμε τον χωρισμό σε μη διατεταγμένες ομάδες και στη συνέχεια να κάνουμε κατανομή αυτών των ομάδων σε ρόλους, πχ να τις τοποθετήσουμε σε διαφορετικά κουτιά, να τις αναθέσουμε μια αποστολή κλπ.

Αν για παράδειγμα είχαμε 20 στρατιώτες και τις χωρίζαμε στις παραπάνω 5 ομάδες για να πάνε σε 5 διαφορετικά φυλάκια, τότε θα είχαμε $N = \frac{20!}{5!5!5!(3!)3!2!} \cdot 5!$ διαφορετικούς τρόπους κατανομής και αποστολής των στρατιωτών σε αυτούς τους ρόλους.

Αν τα 20 στοιχεία ήταν διαφορετικά μολύβια και θέλαμε να τα βάλουμε (α) σε 3 κουτιά χωρητικότητας 5, (β) ένα κουτί των 3 και (γ) ένα των 2, όπου τα 3 κουτιά με την ίδια χωρητικότητα είναι ίδια(ταυτόσημα), τότε θα είχαμε :

$$N = \frac{20!}{5!5!5!(3!)3!2!} \text{ τρόπους.}$$

Το παράδειγμα που ακολουθεί, σε συνδυασμό με όσα έχουμε αναφέρει και σε άλλα σημεία του βιβλίου ή του συμπληρωματικού υλικού καθιστά τον τρόπο που εργαζόμαστε αρκετά σαφή και κατανοητό.

Εφαρμογή

Έχουμε 30 διαφορετικά μολύβια. Θέλουμε να τα χωρίσουμε και να τα βάλουμε:

- σε 2 κουτιά που χωράνε από 3 μολύβια το καθένα και
- σε 4 κουτιά που χωράνε από 6 μολύβια το καθένα.

(α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να κάνουμε τον χωρισμό και τη διανομή των μολυβιών στα κουτιά, αν όλα τα κουτιά θεωρούνται διαφορετικά μεταξύ τους;

(β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να κάνουμε τον χωρισμό και τη διανομή των μολυβιών, αν τα δύο κουτιά χωρητικότητας 3 είναι ίδια μεταξύ τους και τα τέσσερα κουτιά χωρητικότητας 6 είναι επίσης ίδια μεταξύ τους (τα κουτιά διακρίνονται μόνο από τη χωρητικότητα και όχι από κάποιο «όνομα»);

Λύση

(α) Όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά (διακεκριμένα)

Θεωρούμε λοιπόν ότι τα κουτιά έχουν «ονόματα», είναι δηλαδή διακεκριμένα. Έστω ότι τα κουτιά είναι των παρακάτω ειδών:

- Μικρά χωρητικότητας 3 μολυβιών: K_1, K_2 .
- Μεγάλα κουτιά χωρητικότητας 6 μολυβιών: L_1, L_2, L_3, L_4 .

Θα μοιράσουμε τα 30 διαφορετικά μολύβια στα κουτιά αυτά. Επειδή όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά (διακεκριμένα), έχει σημασία όχι μόνο ποια μολύβια θα είναι μαζί, αλλά και σε ποιο συγκεκριμένο κουτί θα πάνε.

Μπορούμε να σκεφτούμε τη διανομή «βήμα – βήμα»:

- Πρώτα γεμίζουμε το κουτί K_1 : διαλέγουμε 3 από τα 30 μολύβια. Αυτό μπορεί να γίνει με

$$\binom{30}{3} \text{ τρόπους.}$$

- Μετά γεμίζουμε το κουτί K_2 : έχουν μείνει 27 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{27}{3}$ τρόπους.

- Μετά γεμίζουμε το κουτί L_1 : έχουν μείνει 24 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{24}{6}$ τρόπους.

- Μετά γεμίζουμε το κουτί L_2 : έχουν μείνει 18 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{18}{6}$ τρόπους.

- Μετά γεμίζουμε το κουτί L_3 : έχουν μείνει 12 μολύβια, οπότε έχουμε $\binom{12}{6}$ τρόπους.

- Τέλος γεμίζουμε το κουτί L_4 με τα 6 που απομένουν: αυτό γίνεται με $\binom{6}{6} = 1$ τρόπο.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων διανομής των μολυβιών είναι:

$$N = \binom{30}{3} \binom{27}{3} \binom{24}{6} \binom{18}{6} \binom{12}{6} \binom{6}{6} \quad (1)$$

Θυμίζουμε τώρα ότι

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ή} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε όλους τους συνδυασμούς και απλοποιήσουμε τη σχέση (1), παίρνουμε έναν πιο «συμπυκνωμένο» τύπο με παραγοντικά. Πράγματι, παίρνουμε τελικά:

$$N = \frac{30!}{3! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 6!} = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

Άρα, όταν όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά, ο αριθμός των τρόπων διανομής των 30 μολυβιών είναι

$$N = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}.$$

Άλλος τρόπος

Λύση σε δύο στάδια: «Χωρισμός σε ομάδες» και «Διανομή στα κουτιά»

Το ίδιο πρόβλημα μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε σε δύο χωριστά στάδια, όπως συνηθίζεται στη συνδυαστική.

Στάδιο Α: Χωρίζουμε τα 30 διαφορετικά μολύβια σε ομάδες με μεγέθη 3, 3, 6, 6, 6, 6, χωρίς να μας ενδιαφέρει ακόμη ποιο κουτί θα πάρει ποια ομάδα.

Στάδιο Β: Αναθέτουμε τις ομάδες στα συγκεκριμένα κουτιά.

Ας δούμε το κάθε στάδιο ξεχωριστά.

Στάδιο Α – Χωρισμός σε ομάδες :

Θέλουμε να χωρίσουμε τα 30 μολύβια σε 2 ομάδες των 3 και 4 ομάδες των 6. Εδώ οι ομάδες του ίδιου μεγέθους δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους (μια ομάδα των 3 και μια άλλη ομάδα των 3 θεωρούνται ίδιες ως «τύπος» ομάδας). Ο αριθμός των διαφορετικών χωρισμών σε ομάδες, χωρίς δηλαδή τη φυσική διάταξη στις ομάδες, είναι:

$$N_1 = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4 \cdot 2! \cdot 4!}.$$

• Στο $30!$ που έχουμε στον αριθμητή απαριθμούμε όλες τις δυνατές σειρές των 30 μολυβιών. Στη συνέχεια:

- Διαιρούμε με $3!$ για κάθε ομάδα των 3 μολυβιών, γιατί μέσα σε κάθε τέτοια ομάδα η σειρά των μολυβιών δεν παίζει ρόλο.
- Διαιρούμε με $6!$ για κάθε ομάδα των 6, για τον ίδιο λόγο.
- Τέλος, διαιρούμε με $2!$ γιατί μπορούμε να ανταλλάξουμε μεταξύ τους τις 2 ομάδες των 3 χωρίς να πάρουμε νέο χωρισμό και με $4!$ για τον ίδιο λόγο για τις 4 ομάδες των 6.

Στάδιο Β – Διανομή των ομάδων στα κουτιά:

Τώρα οι 2 ομάδες των 3 μολυβιών πρέπει να μπουν στα 2 διαφορετικά κουτιά χωρητικότητας 3. Αυτό μπορεί να γίνει με $2!$ τρόπους (ανταλλάσσουμε τις δύο ομάδες).

Οι 4 ομάδες των 6 πρέπει να μπουν στα 4 κουτιά χωρητικότητας 6: Αυτό μπορεί να γίνει με 4! τρόπους. Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:

$$N = N_1 \cdot 2! \cdot 4! = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4 \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

Παίρνουμε ακριβώς την ίδια απάντηση με την προηγούμενη μέθοδο, όπως πρέπει φυσικά.

Συμπέρασμα:

Όταν όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά, ο αριθμός των δυνατών διανομών είναι

$$N = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

(β) Τα κουτιά της ίδιας χωρητικότητας θεωρούνται ίδια μεταξύ τους

Τώρα αλλάζουμε υπόθεση στο πρόβλημα:

- Τα δύο κουτιά χωρητικότητας 3 θεωρούνται ίδια μεταξύ τους (δεν ξεχωρίζουμε ποιο είναι το πρώτο και ποιο το δεύτερο).
- Τα τέσσερα κουτιά χωρητικότητας 6 θεωρούνται επίσης ίδια μεταξύ τους.
- Βέβαια, ένα κουτί χωρητικότητας 3 δεν συγχέεται με ένα κουτί χωρητικότητας 6 – τα δύο είδη κουτιών παραμένουν διαφορετικά.

Τι σημαίνει αυτό; Αν έχουμε έναν τρόπο διανομής και απλώς ανταλλάξουμε τις θέσεις των δύο μικρών κουτιών, δε θεωρούμε ότι αυτός είναι νέος τρόπος: τα δύο μικρά κουτιά είναι ταυτόσημα. Το ίδιο ισχύει και για τα τέσσερα μεγάλα κουτιά.

Ξεκινάμε από τον αριθμό των διανομών όταν όλα τα κουτιά είναι διαφορετικά:

$$N_1 = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4}$$

Πόσες φορές όμως αυτός ο αριθμός δηλώνει το ίδιο αποτέλεσμα, όταν έχουμε ταυτόσημα κουτιά του ίδιου τύπου;

- Μπορούμε να ανταλλάξουμε τα δύο μικρά κουτιά με 2! τρόπους χωρίς να αλλάξει ουσιαστικά η διανομή.
- Μπορούμε επίσης να αντιμεταθέσουμε τα τέσσερα μεγάλα κουτιά με 4! τρόπους.

Άρα κάθε «ουσιαστικά διαφορετική» διανομή (με ταυτόσημα κουτιά) έχει μετρηθεί 2!·4! φορές στον N_1 .

Για να βρούμε τον αριθμό των διαφορετικών διανομών, όταν τα κουτιά του ίδιου τύπου είναι ίδια, πρέπει να διαιρέσουμε με αυτόν τον αριθμό.

Επομένως:

$$N_2 = \frac{N_1}{2!4!} = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4 \cdot 2!4!} = \frac{30!}{(3!)^2 (6!)^4 2!4!}$$

Συμπέρασμα

Όταν τα κουτιά της ίδιας χωρητικότητας (τα δύο των 3 μολυβιών και τα τέσσερα των 6 μολυβιών) είναι ίδια μεταξύ τους, ο αριθμός των δυνατών διανομών είναι:

$$N_2 = \frac{30!}{(3!)^2 \cdot (6!)^4 \cdot 2! \cdot 4!}$$

Ο αριθμός N_2 που βρήκαμε συμπίπτει με τον αριθμό των τρόπων που χωρίζουμε τα 30 διαφορετικά μολύβια σε 2 ομάδες των 3 και 4 ομάδες των 6, όταν δεν μας ενδιαφέρει καθόλου η σειρά των ομάδων του ίδιου μεγέθους.

Αυτό είναι αναμενόμενο, γιατί όταν τα κουτιά της ίδιας χωρητικότητας είναι ίδια μεταξύ τους, η διανομή καθορίζεται ουσιαστικά μόνο από το ποια μολύβια αποτελούν τις ομάδες των 3 και των 6, δηλαδή από τον ίδιο ακριβώς χωρισμό σε ομάδες.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 3

Προσθήκη 4

23-11-2025

Το δυωνυμικό ανάπτυγμα

Ακόμα και από τις πιο στοιχειώσεις σημειώσεις στη Συνδυαστική, δεν μπορεί να λείπει το αποκαλούμενο **δυωνυμικό ανάπτυγμα**.

Από τις πρώτες γυμνασιακές τάξεις γνωρίζουμε τις παρακάτω ταυτότητες :

$$(α) \quad (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(β) \quad (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \alpha^4$$

Με μια μικρή αλγεβρική προσπάθεια, εύκολα μπορεί να προκύψει ακόμα η ταυτότητα:

$$(γ) \quad (\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \alpha^4$$

Εύλογα γεννιέται το ερώτημα:

Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε πχ τα αναπτύγματα $(\alpha + \beta)^5$, $(\alpha + \beta)^6$, $(\alpha + \beta)^7$ και γενικά το ανάπτυγμα $(\alpha + \beta)^v$, όπου v είναι τυχαίος φυσικός αριθμός;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα τη δίνει η παρακάτω θεμελιώδης πρόταση.

Πρόταση

Αν ο v είναι φυσικός αριθμός, τότε :

$$(\alpha + \beta)^v = \binom{v}{0} \alpha^v + \binom{v}{1} \alpha^{v-1} \beta^1 + \binom{v}{2} \alpha^{v-2} \beta^2 + \dots + \binom{v}{v-2} \alpha^2 \beta^{v-2} + \binom{v}{v-1} \alpha^1 \beta^{v-1} + \binom{v}{v} \beta^v$$

Απόδειξη

Θα δώσουμε μια απλή **συνδυαστική απόδειξη**, αν και συνήθως συναντάμε αποδείξεις που βασίζονται στη μαθηματική επαγωγή.

Προκαταβολικά να πούμε ότι ο τυχαίος όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή

$$T(v, k) = \binom{v}{k} \alpha^{v-k} \beta^k, \text{ με } k = 0, 1, 2, \dots, v.$$

Ο όρος μάλιστα αυτός έχει τη θέση $k+1$ μέσα στο ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^v$, μετρώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Ο γενικός όρος θέτοντας τιμές στο k , δηλαδή θέτοντας $k = 0, k = 1, k = 2, \dots, k = v$ δίνει όλους τους όρους του αναπτύγματος.

Ας δούμε όμως την απόδειξη, αν και αυτή ποτέ δεν θα ζητηθεί στις σχολικές τάξεις.

Βλέπουμε ότι κάθε όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή $\mu \alpha^{v-k} \beta^k$, όπου μ είναι ένας συντελεστής που πρέπει να προσδιορίσουμε.

Ας γράψουμε αρχικά :

$$(\alpha + \beta)^v = \underbrace{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \dots (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)}_{v \text{ - παράγοντες}} \quad (1)$$

Για να πάρουμε το μονώνυμο $\alpha^{v-k} \beta^k$ πρέπει να επιλέξουμε από το παραπάνω γινόμενο k παράγοντες, όλοι τους φυσικά ίσοι με $\alpha + \beta$, ώστε να δημιουργήσουμε το β^k . Το α^{v-k} θα το δημιουργήσουν οι υπόλοιποι $v - k$ παράγοντες με έναν και μοναδικό τρόπο.

Αλλά k παράγοντες ίσοι με το $\alpha + \beta$ μπορούμε να πάρουμε από τους v παράγοντες που έχει το γινόμενο (1) με $\binom{v}{k}$ τρόπους.

Επομένως, ο συντελεστής του $\alpha^{v-k} \beta^k$ στον ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^v$ είναι ο $\binom{v}{k}$ και έτσι έχουμε τελειώσει.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι :

$$(\alpha + \beta)^v = \binom{v}{0} \alpha^v + \binom{v}{1} \alpha^{v-1} \beta^1 + \binom{v}{2} \alpha^{v-2} \beta^2 + \dots + \binom{v}{v-2} \alpha^2 \beta^{v-2} + \binom{v}{v-1} \alpha^1 \beta^{v-1} + \binom{v}{v} \beta^v$$

Σχόλια

(α) Επειδή $\binom{v}{k} = \binom{v}{v-k}$ προκύπτει ότι στο ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^v$ οι συντελεστές των $\alpha^{v-k}\beta^k$ και

$\alpha^k\beta^{v-k}$ είναι ίσοι.

Το ανάπτυγμα λοιπόν έχει μια ιδιαίτερη συμμετρία, αφού οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν τους ίδιους συντελεστές.

(β) Με χρήση του συμβόλου Σ για τα αθροίσματα, το ανάπτυγμα γράφεται :

$$(\alpha + \beta)^v = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} \alpha^{v-k} \beta^k \quad \text{ή} \quad (\alpha + \beta)^v = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} \alpha^k \beta^{v-k}$$

(γ) Για $\alpha = 1, \beta = x$ παίρνουμε ότι:

$$(1+x)^v = \sum_{k=0}^v \binom{v}{k} x^k = \binom{v}{0} 1^0 + \binom{v}{1} x + \binom{v}{2} x^2 + \binom{v}{3} x^3 + \dots + \binom{v}{v} x^v$$

(δ) Ο παραπάνω τύπος για $x = 1$ (ή ο βασικός τύπος για $\alpha = \beta = 1$) δίνει :

$$(1+1)^v = \binom{v}{0} 1 + \binom{v}{1} \cdot 1 + \binom{v}{2} \cdot 1^2 + \binom{v}{3} \cdot 1^3 + \dots + \binom{v}{v} \cdot 1^v,$$

δηλαδή

$$\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \binom{v}{3} + \dots + \binom{v}{v} = 2^v \quad (2)$$

(ε) Ο παραπάνω τύπος $\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \binom{v}{3} + \dots + \binom{v}{v} = 2^v$ δηλώνει κάτι σημαντικό που περιγράφουμε στην παρακάτω πρόταση :

Πρόταση

Κάθε σύνολο με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα.

Πράγματι, κάθε υποσύνολο ενός συνόλου A με n στοιχεία έχει ή 0 ή 1 ή 2 ή ... ή n στοιχεία.

♦ Με 0 στοιχεία έχουμε μόνο ένα υποσύνολο, το κενό σύνολο.

♦ Με 1 στοιχείο έχουμε $\binom{v}{1}$ υποσύνολα.

♦ Με 2 στοιχεία έχουμε $\binom{v}{2}$ υποσύνολα.

.....

♦ Με v στοιχεία έχουμε $\binom{v}{v}$ υποσύνολα.

Αθροίζοντας και λόγω της σχέσης (2) συμπεραίνουμε ότι ένα σύνολο έχει :

$$\binom{v}{0} + \binom{v}{1} + \binom{v}{2} + \binom{v}{3} + \dots + \binom{v}{v} = 2^v \text{ υποσύνολα.}$$

Αυτό το συμπέρασμα θα δούμε ότι μπορούμε να το αποδείξουμε και με μεθόδους της Συνδυαστικής, χωρίς δηλαδή χρήση της άλγεβρας.

Παράδειγμα 1°

Να υπολογίσετε το άθροισμα :

$$S = \binom{n}{0} 3^0 + \binom{n}{1} 3^1 + \binom{n}{2} 3^2 + \dots + \binom{n}{n} 3^n$$

Λύση

Σύμφωνα με το διωνυμικό ανάπτυγμα και τον σχετικό τύπο παίρνουμε

$$S = \binom{n}{0} 3^0 + \binom{n}{1} 3^1 + \binom{n}{2} 3^2 + \dots + \binom{n}{n} 3^n = (1+3)^n = 4^n$$

Παράδειγμα 2°

Να βρεθεί ο συντελεστής του x^{10} στο ανάπτυγμα $(1+3x+3x^2+x^3)^5$.

Λύση

Είναι

$$(1+3x+3x^2+x^3)^5 = ((1+x)^3)^5 = (1+x)^{15}$$

Ο συντελεστής του x^{10} στο παραπάνω ανάπτυγμα είναι το

$$\binom{15}{10} = \frac{15!}{10!5!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 11 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 3 = 3003$$

Παράδειγμα 3ο

(α) Να βρεθεί ο συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα $(x^3 + 2)^8$.

(β) Να βρεθεί ο όρος ο ανεξάρτητος του x στο ανάπτυγμα $\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Λύση

(α) Συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα $(x^3 + 2)^8$.

Χρησιμοποιούμε το διωνυμικό θεώρημα:

$$(x^3 + 2)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} (x^3)^k 2^{8-k} = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} 2^{8-k} x^{3k}.$$

Ο γενικός όρος του αναπτύγματος είναι

$$T_k = \binom{8}{k} 2^{8-k} x^{3k}.$$

Θέλουμε τον όρο που περιέχει x^6 , άρα πρέπει να ισχύει

$$3k = 6 \Leftrightarrow k = 2.$$

Επομένως, ο ζητούμενος συντελεστής είναι

$$\binom{8}{2} 2^{8-2} = \binom{8}{2} 2^6.$$

Υπολογίζουμε:

$$\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28, \quad 2^6 = 64,$$

οπότε ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο ..

Συνεπώς, ο συντελεστής του x^6 στο ανάπτυγμα του $(x^3 + 2)^8$ είναι 1792

(β) Ο όρος που είναι ανεξάρτητος του x στο ανάπτυγμα $\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Εφαρμόζουμε ξανά το διωνυμικό θεώρημα:

$$\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2x^3)^{12-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k.$$

Ο γενικός όρος είναι

$$T_k = \binom{12}{k} (2x^3)^{12-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k.$$

Αναλύουμε τις δυνάμεις του x :

$$(2x^3)^{12-k} = 2^{12-k} x^{3(12-k)} \quad \text{και} \quad \left(-\frac{3}{x}\right)^k = (-3)^k x^{-k}.$$

Άρα

$$T_k = \binom{12}{k} 2^{12-k} (-3)^k x^{3(12-k)-k} = \binom{12}{k} 2^{12-k} (-3)^k x^{36-4k}.$$

Θέλουμε όρο ανεξάρτητο του x , δηλαδή η δύναμη του x να είναι 0:

$$36 - 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = 36 \Leftrightarrow k = 9.$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο T_9 :

$$T_9 = \binom{12}{9} 2^{12-9} (-3)^9 = \binom{12}{9} 2^3 (-3)^9.$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους:

$$\binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220, \quad 2^3 = 8, \quad (-3)^9 = -3^9 = -19683.$$

Επομένως

$$T_9 = 220 \cdot 8 \cdot (-19683) = 1760 \cdot (-19683) = -34\,642\,080.$$

Συνεπώς, ο όρος ανεξάρτητος του x στο ανάπτυγμα του $\left(2x^3 - \frac{3}{x}\right)^{12}$ είναι ο αριθμός $-34\,642\,080$.

Παράδειγμα 4ο

Να εξεταστεί αν στο ανάπτυγμα της παράστασης $\left(\frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}\right)^5$ υπάρχει όρος ανεξάρτητος του x . Ποιος είναι αυτός ο όρος;

Λύση

Θεωρούμε την παράσταση $(x^{-2} + 2\sqrt{x})^5 = (x^{-2} + 2x^{1/2})^5$.

Με το διωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$(x^{-2} + 2x^{1/2})^5 = \sum_{k=0}^n \binom{5}{k} (x^{-2})^{5-k} (2x^{1/2})^k.$$

Ο γενικός όρος είναι $T_k = \binom{5}{k} (x^{-2})^{5-k} (2x^{1/2})^k$.

Υπολογίζουμε τη δύναμη του x :

$$(x^{-2})^{5-k} = x^{-2(5-k)} = x^{-10+2k}, \quad (2x^{1/2})^k = 2^k x^{k/2}.$$

Άρα $T_k = \binom{5}{k} 2^k x^{-10+2k+k/2} = \binom{5}{k} 2^k x^{-10+\frac{5k}{2}}$.

Για να είναι ο όρος ανεξάρτητος του x πρέπει ο εκθέτης να είναι 0 :

$$-10 + \frac{5k}{2} = 0 \Leftrightarrow 5k = 20 \Leftrightarrow k = 4.$$

Ο σταθερός όρος είναι επομένως ο $\binom{5}{k} 2^k = \binom{5}{4} 2^4 = 5 \cdot 16 = 80$.

Παράδειγμα 5°

Σε μια σειρά έχουμε τα ψηφία 1,2,3,...,8,9. Πόσες διαφορετικές προσθέσεις μπορούμε να δημιουργήσουμε, βάζοντας ανάμεσα στα ψηφία αυτά ένα ή περισσότερα συν (+); Για παράδειγμα, μια τέτοια πρόσθεση είναι η $123 + 4567 + 89$ που περιέχει δύο συν (+).

Λύση

Τα 9 ψηφία δημιουργούν ανάμεσά τους 8 κενά. Επιλέγουμε κάποια από αυτά και βάζουμε το σύμβολο συν (+). Μπορούμε να πάρουμε ένα ή δύο ή τρία ή ...ή οκτώ κενά. Αφού αυτό γίνεται με

$$\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 2^8 - 1 = 255$$

τρόπους, συμπεραίνουμε ότι σχηματίζονται 255 διαφορετικές προσθέσεις.

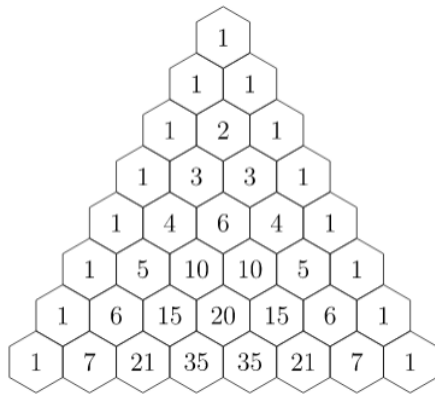
Σχόλιο

Σε καθένα από τα 8 κενά αντιστοιχίζουμε το 1 ή το 0, ανάλογα με τον θα βάλουμε συν ή όχι. Σχηματίζεται έτσι μια διάταξη από 8 στοιχεία, καθένα από τα οποία είναι 1 ή 0. Κάθε πρόσθεση αντιστοιχεί σε μία ακριβώς τέτοια διάταξη και αντιστρόφως. Αλλά το πλήθος αυτών των σχηματισμών, από την πολλαπλασιαστική αρχή, είναι 2^8 . Αφού έχουμε μία τουλάχιστον πρόσθεση, εξαιρούμε τη διάταξη $\underbrace{00 \dots 00}_{8 \text{ θέσεις}}$.

Επομένως το πλήθος των προσθέσεων που μπορούν να δημιουργηθούν είναι $2^8 - 1 = 255$

Το τρίγωνο του Pascal

Οι δυωνυμικοί συντελεστές $C(n, k) = \binom{n}{k}$ μπορούν να παρασταθούν σε μορφή ενός τριγώνου, που έχει την παρακάτω μορφή.



$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} \\
 & & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
 & & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & & & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \\
 \binom{7}{0} & \binom{7}{1} & \binom{7}{2} & \binom{7}{3} & \binom{7}{4} & \binom{7}{5} & \binom{7}{6} & \binom{7}{7}
 \end{array}$$

Το δεύτερο τρίγωνο δείχνει τι περιγράφει στην κάθε θέση το πρώτο τρίγωνο και αντιστρόφως. Ας παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα των αριθμών κάθε γραμμής είναι δύναμη του 2 και αυτό αιτιολογείται και ως εξής:



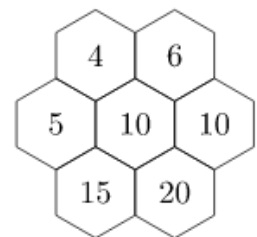
Οι συντελεστές σε κάθε γραμμή περιγράφουν το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^n$

για $\alpha = \beta = 1$ και προφανώς το άθροισμα αυτό στην περίπτωση μας είναι $(\alpha + \beta)^n = (1 + 1)^n = 2^n$

Μια άλλη ιδιότητα που περιγράφει καθένα από τα τρίγωνα προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα των δύο αριθμών της προηγούμενης γραμμής που βρίσκονται ακριβώς πάνω από τον αριθμό αυτό.

Για παράδειγμα στην 5^η γραμμή και στο μεγάλο σχήμα είναι

$10 = 4 + 6 = 6 + 4$. Η γενική ιδιότητα που περιγράφεται με αυτόν τον τρόπο είναι η παρακάτω



$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

γνωστή άλλωστε και ως **ταυτότητα του Pascal**.

Οι πολυωνυμικοί συντελεστές

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο τον τρόπο που αναπτύσσουμε την παράσταση:

$$(\alpha + \beta)^v, v \in \mathbb{N}^*.$$

Το ανάπτυγμα αυτό είναι γνωστό ως **διωνυμικό ανάπτυγμα** και το συναντάμε πολύ συχνά σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, κάτι που δείχνει και τη σπουδαιότητά του.

Θα δούμε τώρα πώς γενικεύεται αυτό το ανάπτυγμα. Θα βρούμε με άλλα λόγια τους συντελεστές του αναπτύγματος $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Οι συντελεστές αυτοί λέγονται πολυωνυμικοί συντελεστές και όπως θα δούμε δεν είναι δύσκολο να προσδιοριστούν.

Πρόταση 1

Ο συντελεστής $T(n_1, n_2, \dots, n_k)$ του όρου $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$ του αναπτύγματος $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ δίνεται από τον τύπο :

$$T(n_1, n_2, \dots, n_k) = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Απόδειξη

Μια και στη σχολική τάξη δεν γίνεται για τη γενικά περίπτωση ούτε καν μια μικρή αναφορά στο ανάπτυγμα αυτό, παρά μόνο στην περίπτωση $n = 2, k = 3$, κάτι που οδηγεί στη γνωστή μας ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha,$$

θα δώσουμε μόνο μια περιληπτική συνδυαστική απόδειξη της παραπάνω πρότασης.

Κάθε όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή $M x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$, όπου όλοι οι εκθέτες είναι φυσικοί αριθμοί και το άθροισμά τους είναι n . Θα υπολογίσουμε το συντελεστή M .

Γράφουμε πρώτα :

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k).$$

Για να δημιουργήσουμε τον παράγοντα $x_1^{n_1}$ θα επιλέξουμε n_1 από τους παραπάνω n παράγοντες.

Αυτό γίνεται με $\binom{n}{n_1}$ τρόπους. Για να δημιουργήσουμε τον παράγοντα $x_2^{n_2}$ θα πάρουμε n_2 από

τους υπόλοιπους $n - n_1$ παράγοντες. Αυτό γίνεται με $\binom{n - n_1}{n_2}$ τρόπους. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή, παίρνουμε ότι ο συντελεστής με M του όρου $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$ είναι

$$\binom{n}{n_1} \binom{n - n_1}{n_2} \dots \binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

Τονίζουμε ότι το κλάσμα $\frac{n!}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k}$ που δίνει το συντελεστή του $x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$ στο ανάπτυγμα δεν

είναι παρά το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων n στοιχείων $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ■

Αν αναζητήσουμε το άθροισμα όλων αυτών των συντελεστών, δεν έχουμε παρά να βάλουμε στη θέση όλων των μεταβλητών την τιμή 1 και θα δούμε ότι αυτό το άθροισμα είναι k^n .

Δεν κάνουμε άλλα σχόλια μια και ξεφεύγουν από τους σκοπούς αυτού του εισαγωγικού βιβλίου που αναφέρεται στη διδασκαλία της Συνδυαστικής στο σχολείο.

Πρόταση 2

Αν $n \in \mathbb{N}^*$, τότε $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}$,

όπου οι εκθέτες διατρέχουν όλες τις δυνατές τιμές στο $\mathbb{N}$ που έχουν άθροισμα ίσο με n .

Οι συντελεστές $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ λέγονται **πολυωνυμικοί συντελεστές**.

Παράδειγμα

Ποιος είναι ο συντελεστής του $\alpha^2 \beta^3 \gamma^5$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta + \gamma)^{10}$;

Απάντηση

Όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω, ο συντελεστής του $\alpha^2 \beta^3 \gamma^5$ είναι ο

$$\binom{10}{2, 3, 5} = \frac{10!}{2! 3! 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 10 \cdot 9 \cdot 7 = 630 \quad \blacksquare$$

Θυμίζουμε ότι οι πολυωνυμικοί συντελεστές δίνουν επίσης :

(i) Το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε σε μια σειρά $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ αντικείμενα,

όταν τα n_1 από αυτά είναι ίσα με α_1 , τα n_2 από αυτά είναι ίσα με α_2 και γενικά τα n_k από αυτά είναι ίσα με α_k .

(ii) Το πλήθος των τρόπων χωρισμού(διαμερίσεων) ενός συνόλου σε k μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, έτσι ώστε να έχουν αντίστοιχα $n_1, n_2, \dots, n_k$ στοιχεία.

Εφαρμογή 1

Να βρεθεί το πλήθος των όρων του αναπτύγματος $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Λύση

Κάθε όρος του αναπτύγματος έχει τη μορφή

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_k^{n_k}, \text{ με } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Το πλήθος λοιπόν των όρων του αναπτύγματος είναι όσες και οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της διοφαντικής εξίσωσης :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

Αλλά το πλήθος αυτών των λύσεων είναι όσοι οι συνδυασμοί με επανάληψη k στοιχείων ανά n , δηλαδή

$$\begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1} \quad \blacksquare$$

Εφαρμογή 2

Να βρεθεί ο συντελεστής του $\alpha^4 \beta^3 \gamma^2 \delta$ στο ανάπτυγμα της παράστασης $(\alpha - \beta + \gamma - \delta)^{10}$

Λύση

Όπως είναι αναμενόμενο, γράφουμε : $\alpha - \beta + \gamma - \delta = \alpha + (-1) + \gamma + (-1)$. Το πρόσημο του $\alpha^4 \beta^3 \gamma^2 \delta$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha - \beta + \gamma - \delta)^{10}$ θα είναι το ίδιο με το πρόσημο του $1^4 (-1)^3 1^2 (-1) = +1$, δηλαδή (+). Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο :

$$\frac{10!}{4!3!2!1!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 200 \cdot 63 = 12600 \quad \blacksquare$$

Εφαρμογή 3

Να βρεθεί ο συντελεστής του $\alpha^3\beta^4\gamma^5$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^6$.

Λύση

Θα γράψουμε αρχικά :

$$\alpha^3\beta^4\gamma^5 = (\alpha\beta)^x (\beta\gamma)^y (\gamma\alpha)^z = \alpha^{x+z}\beta^{x+y}\gamma^{y+z}$$

Πρέπει λοιπόν :

$$(\Sigma): \begin{cases} x+z=3 \\ x+y=4 \\ y+z=5 \end{cases}$$

Οι σχέσεις αυτές με πρόσθεση δίνουν $2(x+y+z)=12 \Leftrightarrow x+y+z=6$

Από αυτήν αφαιρούμε τις εξισώσεις του συστήματος και παίρνουμε :

$$y=6-3=3, \quad x=6-4=2, \quad x=6-5=1$$

Είναι λοιπόν : $\alpha^3\beta^4\gamma^5 = (\alpha\beta)^1(\beta\gamma)^3(\gamma\alpha)^2$, οπότε ψάχνουμε τον συντελεστή του $(\alpha\beta)^1(\beta\gamma)^3(\gamma\alpha)^2$ στο

ανάπτυγμα $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^6$. Αυτός όμως είναι ο αριθμός $\frac{6!}{1!3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 60$.

Άλλος τρόπος

Επειδή

$$(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^6 = (\alpha\beta\gamma)^6 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right)^6,$$

αρκεί να βρούμε τον συντελεστή του $\alpha^{6-3}\beta^{6-4}\gamma^{6-5} = \alpha^3\beta^2\gamma^1$. Αλλά αυτός ο συντελεστής είναι ο :

$$\frac{6!}{3!2!1!} = \frac{3!4 \cdot 5 \cdot 6}{6 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60 \quad \blacksquare$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 4

Προσθήκη 5

23-11-2025

Στον κορμό του βιβλίου έχουμε αναφέρει την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού (A-EA) για δύο και τρία σύνολα.

Δίνουμε σε αυτή την προσθήκη δύο εφαρμογές για δύο σύνολα, που θα καταστήσουν την Αρχή αυτή πιο κατανοητή, δίνοντας συγχρόνως και έναν διδακτικό τρόπο για να παρουσιαστούν σε μαθητές.

Αναγραμματισμοί και αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Άσκηση 1

Δίνεται η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ**, που αποτελείται από τα γράμματα T, P, A, Π, E, Z, I. Να βρεθεί πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης αυτής υπάρχουν, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ (συνεχόμενα γράμματα) ΤΠΠ και ΕΑΡ.

Λύση:

Πριν προχωρήσουμε στη λύση να θυμίσουμε ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A το συμβολίζουμε είτε με $N(A)$ είτε με $|A|$.

1. Συνολικοί αναγραμματισμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.

Η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ έχει 7 διαφορετικά γράμματα (T, P, A, Π, E, Z, I). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

2. Ορισμός των συνόλων A και B.

Θεωρούμε τα εξής σύνολα αναγραμματισμών της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙ**:

A: Το σύνολο των αναγραμματισμών, στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΤΠΠ.

B: Το σύνολο των αναγραμματισμών, στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΕΑΡ.

Εμείς θέλουμε τους αναγραμματισμούς, στους οποίους δεν εμφανίζεται ούτε το ΤΠΠ ούτε το ΕΑΡ, δηλαδή το πλήθος των αναγραμματισμών που ΔΕΝ ανήκουν στο $A \cup B$.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \text{Συνολικοί αναγραμματισμοί} - |A \cup B| = 7! - |A \cup B|.$$

Με την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού παίρνουμε :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

3. Υπολογισμός του $|A|$ (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΤΙΠ).

Θεωρούμε το μπλοκ ΤΙΠ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», σαν ένα καινούργιο γράμμα X.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$X = (\text{ΤΙΠ}), P, A, E, Z, I.$$

Συνολικά έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, τα οποία μπορούν να διαταχθούν με $5!$ τρόπους. Άρα:

$$|A| = 5! = 120.$$

4. Υπολογισμός του $|B|$ (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΕΑΡ).

Αντίστοιχα, θεωρούμε το μπλοκ ΕΑΡ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», δηλαδή ένα καινούργιο εικονικό γράμμα Y.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$Y = (\text{ΕΑΡ}), T, P, \Pi, Z, I.$$

Και εδώ έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, οπότε ο αριθμός των διατάξεών τους είναι $5!$.

Συνεπώς:

$$|B| = 5! = 120.$$

5. Υπολογισμός του $|A \cap B|$ (αναγραμματισμοί με ΤΙΠ ΚΑΙ ΕΑΡ).

Τώρα θέλουμε τους αναγραμματισμούς στους οποίους εμφανίζονται ταυτόχρονα τα μπλοκ ΤΙΠ και ΕΑΡ.

Παρατηρούμε ότι τα δύο μπλοκ δεν έχουν κοινό γράμμα, άρα δεν μπορούν να επικαλύπτονται.

Τα θεωρούμε λοιπόν ως δύο ενιαίες «υπέρ-θέσεις»:

$$X = (\text{ΤΙΠ}), Y = (\text{ΕΑΡ}).$$

Μαζί με τα υπόλοιπα γράμματα ΤΡΑΠΕΖΙ, μετά την αφαίρεση των γραμμάτων T, I, Π και E, A, P, απομένει μόνο το γράμμα Z.

Άρα τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι:

$$X = (\text{ΤΙΠ}), Y = (\text{ΕΑΡ}), Z.$$

Συνολικά έχουμε 3 διαφορετικά αντικείμενα και συνεπώς $3!$ μεταθέσεις (διατάξεις). Επομένως $|A \cap B| = 3! = 6$.

6. Τελικός υπολογισμός του ζητούμενου πλήθους.

Από την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 120 - 6 = 234.$$

Οι αναγραμματισμοί που ΔΕΝ περιέχουν ούτε το μπλοκ ΤΙΠ ούτε το μπλοκ ΕΑΡ είναι:

$$N = 7! - |A \cup B| = 5040 - 234 = 4806 \blacksquare$$

Άσκηση 2(1^η Παραλλαγή)

Δίνεται η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ**, που αποτελείται από τα γράμματα T, P, A, Π, E, Z, I .

Να βρεθεί πόσοι αναγραμματισμοί (διαφορετικές μεταθέσεις των 7 γραμμάτων) της λέξης υπάρχουν, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ ΠΑΤ και ΤΡΙ.

Λύση:**1. Συνολικοί αναγραμματισμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.**

Η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ** έχει 7 διαφορετικά γράμματα (T, P, A, Π, E, Z, I). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

2. Ορισμός των συνόλων A και B.

Θεωρούμε τα εξής σύνολα αναγραμματισμών της λέξης **ΤΡΑΠΕΖΙ**:

A: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΠΑΤ ως συνεχόμενα γράμματα.

B: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΤΡΙ ως συνεχόμενα γράμματα.

Εμείς θέλουμε τους αναγραμματισμούς, στους οποίους δεν εμφανίζεται ούτε το ΠΑΤ ούτε το ΤΡΙ, δηλαδή το πλήθος των αναγραμματισμών που ΔΕΝ ανήκουν στο $A \cup B$.

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \text{Συνολικοί αναγραμματισμοί} - |A \cup B| = 7! - |A \cup B|.$$

Με την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού παίρνουμε :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

3. Υπολογισμός του |A| (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΠΑΤ).

Θεωρούμε το μπλοκ ΠΑΤ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», σαν ένα καινούργιο γράμμα X.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$X = (\text{ΠΑΤ}), P, E, Z, I.$$

Συνολικά έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, τα οποία μπορούν να διαταχθούν με $5!$ τρόπους.

Άρα:

$$|A| = 5! = 120.$$

4. Υπολογισμός του |B| (αναγραμματισμοί με μπλοκ ΤΡΙ).

Αντίστοιχα, θεωρούμε το μπλοκ ΤΡΙ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», δηλαδή ένα καινούργιο εικονικό γράμμα Y.

Τότε τα γράμματα/αντικείμενα που πρέπει να διατάξουμε είναι:

$$Y = (TPI), \Pi, A, E, Z.$$

Και εδώ έχουμε 5 διαφορετικά αντικείμενα, άρα ο αριθμός των διατάξεών τους είναι 5!.

Συνεπώς $|B| = 5! = 120$.

5. Υπολογισμός του $|A \cap B|$ (αναγραμματισμοί με ΠΑΤ ΚΑΙ ΤΡΙ).

Τώρα θέλουμε τους αναγραμματισμούς στους οποίους εμφανίζονται ταυτόχρονα τα μπλοκ ΠΑΤ και ΤΡΙ. Γράφουμε τα δύο μπλοκ:

$$\text{ΠΑΤ: } \Pi - A - T \quad \text{και} \quad \text{ΤΡΙ: } T - P - I$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο μπλοκ έχουν κοινό γράμμα μόνο το T.

Επειδή στη λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ το γράμμα T εμφανίζεται μόνο μία φορά, τα δύο μπλοκ, αν συνυπάρχουν, πρέπει να μοιράζονται αυτό το ίδιο T.

Στο ΠΑΤ το T βρίσκεται στο τέλος του μπλοκ, ενώ στο ΤΡΙ το T βρίσκεται στην αρχή του μπλοκ. Άρα για να υπάρχουν και τα δύο μπλοκ ταυτόχρονα, πρέπει να «κολλούν» πάνω στο T, ως εξής:

$$\text{ΠΑΤΡΙ} = \Pi - A - T - P - I.$$

Ελέγχουμε ότι πράγματι:

- Στις θέσεις 1-3 έχουμε ΠΑΤ,
- Στις θέσεις 3-5 έχουμε ΤΡΙ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός που ανήκει στο $A \cap B$ περιέχει υποχρεωτικά το μπλοκ ΠΑΤΡΙ (ως συνεχόμενα γράμματα).

Θεωρούμε λοιπόν το ΠΑΤΡΙ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» Z, ένα εικονικό δηλαδή γράμμα Z. Τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ είναι T, P, A, Π, E, Z, I.

Για το μπλοκ ΠΑΤΡΙ χρησιμοποιήσαμε τα γράμματα Π, A, T, P, I, οπότε απομένουν τα γράμματα E και Z. Άρα τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι:

$$Z = (\text{ΠΑΤΡΙ}), E, Z.$$

Συνολικά 3 διαφορετικά αντικείμενα δίνουν 3! Μεταθέσεις. Επομένως $|A \cap B| = 3! = 6$.

6. Τελικός υπολογισμός του ζητούμενου πλήθους.

Από την αρχή εγκλεισμού-Αποκλεισμού έχουμε:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 120 + 120 - 6 = 234.$$

Οι αναγραμματισμοί που ΔΕΝ περιέχουν ούτε το μπλοκ ΠΑΤ ούτε το μπλοκ ΤΡΙ είναι:

$$N = 7! - |A \cup B| = 5040 - 234 = 4806.$$

Ο ζητούμενος λοιπόν αριθμός αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ ΠΑΤ και ΤΡΙ είναι $N = 4806$ ■

Τέλος, ας δούμε και μια εφαρμογή της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού για τρία σύνολα.

Άσκηση 3 (2^η Παραλλαγή)

Δίνεται η λέξη **ΤΡΑΠΕΖΙ**, που αποτελείται από τα γράμματα T, P, A, Π, E, Z, I (όλα διαφορετικά).

Να βρεθεί πόσοι αναγραμματισμοί (διαφορετικές μεταθέσεις των 7 γραμμάτων) υπάρχουν, στους οποίους δεν εμφανίζονται τα μπλοκ (συνεχόμενα γράμματα) ΤΑ, ΑΤΙ και ΠΕΤ.

Λύση:

1. Συνολικοί αναγραμματισμοί χωρίς κανέναν περιορισμό.

Η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ έχει 7 διαφορετικά γράμματα (T, P, A, Π, E, Z, I). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

2. Ορισμός των συνόλων A, B και C.

Θεωρούμε τα εξής σύνολα αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ:

A: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΤΑ ως συνεχόμενα γράμματα.

B: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΑΤΙ ως συνεχόμενα γράμματα.

C: Το σύνολο των αναγραμματισμών στους οποίους εμφανίζεται το μπλοκ ΠΕΤ ως συνεχόμενα γράμματα.

Εμείς θέλουμε τους αναγραμματισμούς, στους οποίους δεν εμφανίζεται κανένα από τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ, ΠΕΤ, δηλαδή το πλήθος των αναγραμματισμών που ΔΕΝ ανήκουν στο

$$A \cup B \cup C.$$

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$N = \text{Συνολικοί αναγραμματισμοί} - |A \cup B \cup C| = 7! - |A \cup B \cup C|.$$

Με την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για τρία σύνολα έχουμε:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

3. Υπολογισμός των $|A|$, $|B|$, $|C|$.

- Για το σύνολο A (μπλοκ ΤΑ):

Θεωρούμε το ΤΑ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» X. Το μπλοκ ΤΑ χρησιμοποιεί τα γράμματα T και A, οπότε απομένουν τα γράμματα P, Π, E, Z, I.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $X = (TA), P, \Pi, E, Z, I \rightarrow$ συνολικά 6 διαφορετικά αντικείμενα. Άρα:

$$|A| = 6! = 720.$$

- Για το σύνολο B (μπλοκ ATΙ):

Θεωρούμε το ATΙ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» Υ. Το μπλοκ ATΙ χρησιμοποιεί τα γράμματα Α, Τ και Ι, οπότε απομένουν τα γράμματα Ρ, Π, Ε, Ζ.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $Y = (ATΙ), Ρ, Π, Ε, Ζ \rightarrow 5$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|B| = 5! = 120.$$

- Για το σύνολο C (μπλοκ ΠΕΤ):

Θεωρούμε το ΠΕΤ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση» Ζ. Το μπλοκ ΠΕΤ χρησιμοποιεί τα γράμματα Π, Ε και Τ, οπότε απομένουν τα γράμματα Ρ, Α, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $Z = (ΠΕΤ), Ρ, Α, Ζ, Ι \rightarrow 5$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|C| = 5! = 120.$$

4. Υπολογισμός των $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$.

- Τομή $A \cap B$ (αναγραμματισμοί με ΤΑ και ATΙ):

Τα μπλοκ ΤΑ (Τ-Α) και ATΙ (Α-Τ-Ι) θα απαιτούσαν τουλάχιστον δύο φορές τα γράμματα Τ και Α για να εμφανιστούν χωριστά, κάτι που δεν ισχύει. Αν προσπαθήσουμε να τα επικαλύψουμε, θα έπρεπε να έχουμε μια διάταξη τύπου ΤΑΤΙ, στην οποία το Τ εμφανίζεται δύο φορές. Επομένως δεν υπάρχει αναγραμματισμός που να περιέχει και τα δύο μπλοκ.

Άρα:

$$|A \cap B| = 0.$$

- Τομή $B \cap C$ (αναγραμματισμοί με ATΙ και ΠΕΤ):

Τα μπλοκ ATΙ (Α-Τ-Ι) και ΠΕΤ (Π-Ε-Τ) μοιράζονται μόνο το γράμμα Τ, το οποίο υπάρχει μία φορά στη λέξη. Για να εμφανιστούν και τα δύο, θα χρειαζόταν είτε δεύτερο Τ είτε κάποια συμβατή επικάλυψη, η οποία όμως δεν είναι δυνατή λόγω των θέσεων του Τ στα δύο μπλοκ (2η θέση στο ATΙ, 3η θέση στο ΠΕΤ). Άρα:

$$|B \cap C| = 0.$$

- Τομή $A \cap C$ (αναγραμματισμοί με ΤΑ και ΠΕΤ):

Τα μπλοκ ΤΑ (Τ-Α) και ΠΕΤ (Π-Ε-Τ) μοιράζονται το γράμμα Τ. Μπορούν να επικαλυφθούν στο Τ, έτσι ώστε να σχηματίζουν το μπλοκ ΠΕΤΑ = Π-Ε-Τ-Α. Πράγματι:

- Στις θέσεις 1–3 του ΠΕΤΑ έχουμε ΠΕΤ,
- Στις θέσεις 3–4 του ΠΕΤΑ έχουμε ΤΑ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός που ανήκει στο $A \cap C$ περιέχει υποχρεωτικά το μπλοκ **ΠΕΤΑ**.

Θεωρούμε λοιπόν το ΠΕΤΑ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», ένα εικονικό γράμμα, W .

Το ΠΕΤΑ χρησιμοποιεί τα γράμματα Π, Ε, Τ, Α, οπότε από τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ απομένουν τα γράμματα Ρ, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που μετατίθενται είναι: $W = (\text{ΠΕΤΑ})$, Ρ, Ζ, Ι, δηλαδή 4 διαφορετικά αντικείμενα. Άρα:

$$|A \cap C| = 4! = 24.$$

5. Υπολογισμός της τριπλής τομής $|A \cap B \cap C|$.

Για να ανήκει ένας αναγραμματισμός στο $A \cap B \cap C$, θα έπρεπε να περιέχει ταυτόχρονα τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ και ΠΕΤ.

Όμως ήδη από τα παραπάνω είδαμε ότι δεν υπάρχει αναγραμματισμός που να περιέχει ταυτόχρονα ΤΑ και ΑΤΙ ($|A \cap B| = 0$). Άρα δεν μπορεί να υπάρξει και αναγραμματισμός που να περιέχει και τα τρία μπλοκ. Επομένως:

$$|A \cap B \cap C| = 0.$$

6. Τελικός υπολογισμός του ζητούμενου πλήθους.

Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού για τα τρία σύνολα A, B, C έχουμε:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 720 + 120 + 120 - 0 - 24 - 0 + 0 = 936. \end{aligned}$$

Οι αναγραμματισμοί που ΔΕΝ περιέχουν κανένα από τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ, ΠΕΤ είναι:

$$N = 7! - |A \cup B \cup C| = 5040 - 936 = 4104.$$

Συμπέρασμα

Ο ζητούμενος αριθμός αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ, στους οποίους δηλαδή δεν εμφανίζονται τα μπλοκ ΤΑ, ΑΤΙ και ΠΕΤ είναι $N = 4104$ ■

Άσκηση 4(3^η Παραλλαγή- Για εξάσκηση)

Δίνεται η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ, που αποτελείται από τα 7 διαφορετικά γράμματα Τ, Ρ, Α, Π, Ε, Ζ, Ι.

Θεωρούμε τα εξής μπλοκ (συνεχόμενα γράμματα):

- μπλοκ Α: ΤΡΑ
- μπλοκ Β: ΡΑΠ
- μπλοκ Γ: ΑΠΕ

Έστω Α, Β, Γ τα σύνολα των αναγραμματισμών της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ στους οποίους εμφανίζεται αντίστοιχα το μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ (τουλάχιστον μία φορά).

(α) Να βρεθούν τα πλήθη $|A|$, $|B|$, $|C|$.

(β) Να βρεθούν τα πλήθη $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$.

(γ) Να βρεθεί το πλήθος $|A \cap B \cap C|$.

(δ) Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών, στους οποίους δεν εμφανίζεται κανένα από τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ.

Λύση (Συγκεντρωτικά)**Συνολικοί αναγραμματισμοί της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ.**

Η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ έχει 7 διαφορετικά γράμματα (Τ, Ρ, Α, Π, Ε, Ζ, Ι). Άρα ο συνολικός αριθμός των αναγραμματισμών της είναι:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

Υπολογισμός των $|A|$, $|B|$, $|C|$.

Θεωρούμε κάθε μπλοκ ως μία ενιαία «υπέρ-θέση», ένα εικονικό γράμμα με άλλα λόγια.

- Για το σύνολο Α (μπλοκ ΤΡΑ):

Το μπλοκ ΤΡΑ χρησιμοποιεί τα γράμματα Τ, Ρ, Α. Αν το θεωρήσουμε ως ένα νέο γράμμα $X = (ΤΡΑ)$, τα υπόλοιπα γράμματα της λέξης είναι Π, Ε, Ζ, Ι.

Άρα τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: X, Π, E, Z, I και έτσι έχουμε συνολικά 5 διαφορετικά αντικείμενα. Επομένως:

$$|A| = 5! = 120.$$

- Για το σύνολο Β (μπλοκ ΡΑΠ):

Το μπλοκ ΡΑΠ χρησιμοποιεί τα γράμματα Ρ, Α, Π. Θεωρούμε $Y = (ΡΑΠ)$. Απομένουν τα γράμματα Τ, Ε, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: Y, T, E, Z, I δηλαδή 5 διαφορετικά αντικείμενα. Άρα:

$$|B| = 5! = 120.$$

- Για το σύνολο C (μπλοκ ΑΠΕ):

Το μπλοκ ΑΠΕ χρησιμοποιεί τα γράμματα Α, Π, Ε. Θεωρούμε $Z = (ΑΠΕ)$. Απομένουν τα γράμματα Τ, Ρ, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $Z, T, P, Z, I \rightarrow 5$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|C| = 5! = 120.$$

Υπολογισμός των τομών $|A \cap B|$, $|A \cap C|$, $|B \cap C|$.

Για να βρούμε τα πλήθη των τομών, ψάχνουμε πώς μπορούν να «επικαλυφθούν» τα αντίστοιχα μπλοκ.

- Τομή $A \cap B$ (αναγραμματισμοί με ΤΡΑ και ΡΑΠ):

Τα μπλοκ είναι ΤΡΑ (Τ-Ρ-Α) και ΡΑΠ (Ρ-Α-Π). Μοιράζονται τα γράμματα Ρ και Α.

Επειδή στη λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ κάθε γράμμα εμφανίζεται μία φορά, τα δύο μπλοκ, αν συνυπάρχουν, πρέπει να μοιράζονται αυτά τα ίδια γράμματα. Η μόνη δυνατή επικάλυψη είναι:

$$\text{ΤΡΑΠ} = \text{T} - \text{P} - \text{A} - \text{Π},$$

όπου:

- στις θέσεις 1–3 έχουμε ΤΡΑ,
- στις θέσεις 2–4 έχουμε ΡΑΠ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $A \cap B$ περιέχει το μπλοκ ΤΡΑΠ.

Θεωρούμε το ΤΡΑΠ ως μία «υπέρ-θέση» W. Το ΤΡΑΠ χρησιμοποιεί τα γράμματα Τ, Ρ, Α, Π, οπότε από τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ απομένουν τα Ε, Ζ, Ι.

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $W = (\text{ΤΡΑΠ}), E, Z, I \rightarrow 4$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|A \cap B| = 4! = 24.$$

- Τομή $A \cap C$ (αναγραμματισμοί με ΤΡΑ και ΑΠΕ):

Τα μπλοκ είναι ΤΡΑ (Τ-Ρ-Α) και ΑΠΕ (Α-Π-Ε). Μοιράζονται το γράμμα Α.

Για να συνυπάρχουν με κοινό το γράμμα Α, η φυσική επικάλυψη είναι:

$$\text{ΤΡΑΠΕ} = \text{T} - \text{P} - \text{A} - \text{Π} - \text{Ε},$$

όπου:

- Στις θέσεις 1–3 έχουμε ΤΡΑ,
- Στις θέσεις 3–5 έχουμε ΑΠΕ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $A \cap C$ περιέχει το μπλοκ ΤΡΑΠΕ.

Θεωρούμε το ΤΡΑΠΕ ως μία «υπέρ-θέση» U . Το ΤΡΑΠΕ χρησιμοποιεί τα γράμματα T, P, A, Π, E , οπότε από τα γράμματα της λέξης απομένουν τα Z, I .

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $U = (\text{ΤΡΑΠΕ}), Z, I \rightarrow 3$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|A \cap C| = 3! = 6.$$

- Τομή $B \cap C$ (αναγραμματισμοί με ΡΑΠ και ΑΠΕ):

Τα μπλοκ είναι ΡΑΠ ($P-A-\Pi$) και ΑΠΕ ($A-\Pi-E$). Μοιράζονται τα γράμματα A και Π .

Η επικάλυψη που χρησιμοποιεί τα ίδια A και Π είναι:

$$\text{ΡΑΠΕ} = P - A - \Pi - E,$$

όπου:

- στις θέσεις 1–3 έχουμε ΡΑΠ,
- στις θέσεις 2–4 έχουμε ΑΠΕ.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $B \cap C$ περιέχει το μπλοκ ΡΑΠΕ.

Θεωρούμε το ΡΑΠΕ ως μία «υπέρ-θέση» V . Το ΡΑΠΕ χρησιμοποιεί τα γράμματα P, A, Π, E , οπότε από τα γράμματα της λέξης ΤΡΑΠΕΖΙ απομένουν τα T, Z, I .

Τα αντικείμενα που διατάσσονται είναι: $V = (\text{ΡΑΠΕ}), T, Z, I \rightarrow 4$ διαφορετικά αντικείμενα.

Άρα:

$$|B \cap C| = 4! = 24.$$

Υπολογισμός της τριπλής τομής $|A \cap B \cap C|$.

Για να ανήκει ένας αναγραμματισμός στο $A \cap B \cap C$, πρέπει να περιέχει ταυτόχρονα τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ και ΑΠΕ.

Από τον υπολογισμό των τομών $A \cap C$ είδαμε ότι κάθε αναγραμματισμός με ΤΡΑ και ΑΠΕ περιέχει το μπλοκ ΤΡΑΠΕ.

Παρατηρούμε ότι το ΤΡΑΠΕ περιέχει και το μπλοκ ΡΑΠ:

$$\text{ΤΡΑΠΕ} = T - P - A - \Pi - E,$$

με ΡΑΠ στις θέσεις 2–4.

Άρα κάθε αναγραμματισμός του $A \cap C$ αυτόματα ανήκει και στο B . Επομένως η τριπλή τομή $A \cap B \cap C$ συμπίπτει με το $A \cap C$.

Έτσι:

$$|A \cap B \cap C| = |A \cap C| = 3! = 6.$$

Υπολογισμός του $|A \cup B \cup C|$ και του πλήθους χωρίς κανένα μπλοκ.

Από την αρχή E-A για τρία σύνολα έχουμε:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές:

- ♦ $|A| = |B| = |C| = 120$,
- ♦ $|A \cap B| = 24$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 24$, $|A \cap B \cap C| = 6$.

Έτσι:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= 120 + 120 + 120 - 24 - 6 - 24 + 6 \\ &= 360 - 54 + 6 = 360 - 48 = 312. \end{aligned}$$

Οι αναγραμματισμοί στους οποίους ΔΕΝ εμφανίζεται κανένα από τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ είναι το συμπλήρωμα του $A \cup B \cup C$ στο σύνολο όλων των αναγραμματισμών:

$$N = 7! - |A \cup B \cup C| = 5040 - 312 = 4728.$$

Συνοψίζοντας:

- ♦ $|A| = |B| = |C| = 120$,
- ♦ $|A \cap B| = 24$, $|A \cap C| = 6$, $|B \cap C| = 24$,
- ♦ $|A \cap B \cap C| = 6$,

και οι αναγραμματισμοί της ΤΡΑΠΕΖΙ χωρίς κανένα από τα μπλοκ ΤΡΑ, ΡΑΠ, ΑΠΕ είναι 4728.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 5

Προσθήκη 6

23-11-2025

Αναγραμματισμοί – Διαμέριση συνόλου Διαίρεση συνόλου

*Το κεφάλαιο αυτό είναι από το βιβλίο
Συνδυαστική και Πιθανότητες (Υπό έκδοση)
που ετοιμάσαμε με τον Κώστα Καπούλα*

4.1 Αναγραμματισμοί

Παραδείγματα

1. Έστω ότι έχουμε τη λέξη **ΤΩΡΑ**. Η λέξη αυτή αποτελείται από 4 γράμματα διαφορετικά μεταξύ τους. Αν αλλάξουμε τη σειρά των 4 γραμμάτων με οποιονδήποτε τρόπο, θα πάρουμε άλλες λέξεις, οι οποίες θα περιέχουν πάλι τα ίδια γράμματα Τ, Ω, Ρ, Α. Οι λέξεις που θα προκύψουν δεν έχουν κατ' ανάγκην νόημα.

Επειδή έχουμε 4 θέσεις $_ _ _ _$ και σε κάθε θέση θα τοποθετηθεί ένα γράμμα, με τα γράμματα να είναι διαφορετικά μεταξύ τους, προφανώς μιλάμε για τις μεταθέσεις των 4 γραμμάτων. Άρα οι λέξεις που μπορούμε να σχηματίσουμε (δηλαδή οι αναγραμματισμοί) είναι σε πλήθος $M_4 = 4! = 24$.

2. Έστω ότι έχουμε τη λέξη **ΑΛΛΟ**, η οποία έχει κι αυτή 4 γράμματα. Εδώ τα γράμματα δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους. Έχουμε ένα Α, δύο Λ και ένα Ο. Πόσοι είναι εδώ οι αναγραμματισμοί;

Έχουμε πάλι τέσσερις θέσεις $_ _ _ _$. Τις δύο από αυτές τις θέσεις θα τις καταλάβουν τα δύο Λ.

Επιλέγουμε λοιπόν από τις 4 θέσεις τις 2 με $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ τρόπους και τοποθετούμε σ' αυτές από ένα

Λ. Μας μένουν 2 κενές θέσεις. Επιλέγουμε τη μία από αυτές τις θέσεις με $\binom{2}{1}$ τρόπους και

τοποθετούμε σ' αυτή τη θέση π.χ. το Α. Στην εναπομείνουσα κενή θέση θα τοποθετηθεί υποχρεωτικά το

Ο. Άρα έχουμε:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ αναγραμματισμούς.}$$

Όταν τα 4 γράμματα είναι διαφορετικά, οι αναγραμματισμοί είναι όσες οι μεταθέσεις των 4 ατόμων (γραμμάτων), δηλαδή είναι $4! = 24$.

Όταν όμως δύο γράμματα είναι ίδια, τότε οι αναγραμματισμοί δεν είναι ίσοι με τις μεταθέσεις των 4 ατόμων, αλλά είναι ίσοι με $\frac{4!}{2} = 12$. Αυτό συμβαίνει διότι σε έναν οποιονδήποτε αναγραμματισμό, π.χ.

τον Λ Α Λ Ο, η αλλαγή του Λ της πρώτης θέσης με το Λ της τρίτης θέσης δε δίνει διαφορετική λέξη. Τα δύο λοιπόν Λ δε διατάσσονται μεταξύ τους.

Επομένως οι αναγραμματισμοί που προκύπτουν από τα γράμματα της λέξης ΑΛΛΟ είναι σε πλήθος ίσοι με $\frac{4!}{2!1!1!}$. Οι αναγραμματισμοί αυτοί λέγονται και **μεταθέσεις με επανάληψη** και συμβολίζονται με

$M_4(2, 1, 1)$. Στον συμβολισμό $M_4(2, 1, 1)$ εννοούμε ότι έχουμε 4 θέσεις στη σειρά και σε 2 θέσεις από αυτές υπάρχει το ίδιο αντικείμενο (γράμμα).

3. Έστω ότι έχουμε την λέξη **ΠΑΠΑΡΟΥΝΑ**. Η λέξη αυτή έχει δύο Π, τρία Α, ένα Ρ, ένα Ο, ένα Υ και ένα Ν, δηλαδή έχει 9 γράμματα. Τοποθετηθούμε τα γράμματα στις 9 θέσεις. Έστω ότι πρώτα τοποθετούμε τα 2 Π σε κάποιες θέσεις, μετά τοποθετούμε τα 3 Α σε κάποιες κενές θέσεις, μετά τοποθετούμε το Ρ σε κάποια κενή θέση, μετά τοποθετούμε το Ο σε κάποια κενή θέση, μετά τοποθετούμε το Υ σε κάποια κενή θέση και τέλος τοποθετούμε το Ν στη μοναδική κενή θέση που απέμεινε. Έχουμε λοιπόν τη μετάθεση με επανάληψη:

$$\begin{aligned} M_9(2, 3, 1, 1, 1, 1) &= \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1} = \\ &= \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot 1 = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}. \end{aligned}$$

Άρα το πλήθος των αναγραμματισμών είναι:

$$M_9(2, 3, 1, 1, 1, 1) = \frac{9!}{2! \cdot 3!} = \frac{362.880}{12} = 30.240.$$

Γενικός τύπος για μεταθέσεις με επανάληψη

Έστω ότι έχουμε v αντικείμενα εκ των οποίων v_1 απ' αυτά είναι ίδια, v_2 απ' αυτά είναι ίδια, διαφορετικά όμως από τα προηγούμενα, v_3 απ' αυτά είναι ίδια, διαφορετικά όμως από τα δύο προηγούμενα είδη κ.λπ. και v_k αντικείμενα είναι ίδια, διαφορετικά όμως από όλα τα προηγούμενα είδη αντικειμένων. Έχουμε εδώ

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = v.$$

Ζητάμε να βρούμε τις μεταθέσεις με επαναλήψεις $M(v_1, v_2, \dots, v_k)$ με $v_1 + v_2 + \dots + v_k = v$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 M(v_1, v_2, \dots, v_k) &= \binom{v}{v_1} \cdot \binom{v-v_1}{v_2} \cdot \binom{v-v_1-v_2}{v_3} \cdot \dots \cdot \binom{v-v_1-v_2-\dots-v_{k-1}}{v_k} = \\
 &= \frac{v!}{v_1! (v-v_1)!} \cdot \frac{(v-v_1)!}{v_2! (v-v_1-v_2)!} \cdot \frac{(v-v_1-v_2)!}{v_3! (v-v_1-v_2-v_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(v-v_1-v_2-\dots-v_{k-1})!}{v_k! (v-v_1-v_2-\dots-v_{k-1}-v_k)!} = \\
 &= \frac{v!}{v_1! v_2! \dots v_k! 0!} = \frac{v!}{v_1! v_2! \dots v_k!}.
 \end{aligned}$$

Άρα ο τύπος είναι:

$$M_v(v_1, v_2, \dots, v_k) = \binom{v}{v_1, v_2, \dots, v_k} = \frac{v!}{v_1! v_2! \dots v_k!}$$

Ο συμβολισμός $\binom{v}{v_1, v_2, \dots, v_k}$ θυμίζει ότι η απόδειξη του τύπου θα γίνει με συνδυασμούς, δηλαδή από τις v θέσεις επιλέγουμε π.χ. πρώτα τις v_1 θέσεις, μετά τις v_2 θέσεις κ.λπ. και τέλος τις v_k θέσεις, οι οποίες βέβαια θα είναι καθορισμένες επακριβώς και τοποθετούμε σ' αυτές με τη σειρά το 1^ο είδος ίδιων αντικειμένων, το 2^ο είδος ίδιων αντικειμένων, ..., το k ^ο είδος ίδιων αντικειμένων.

4.2 Εφαρμογές στη Συνδυαστική

Κ.2.1 Έστω ότι έχουμε τη λέξη ΚΑΠΑΚΙ. Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών σε κάθε μία από τα παρακάτω περιπτώσεις:

- α)** Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
- β)** Όλα τα φωνήεντα είναι δίπλα – δίπλα.
- γ)** Όλα τα σύμφωνα είναι δίπλα – δίπλα.
- δ)** Όλα τα φωνήεντα είναι δίπλα – δίπλα και όλα τα σύμφωνα είναι δίπλα – δίπλα.
- ε)** Η λέξη αρχίζει με Κ και τελειώνει με Ι.
- στ)** Τα δύο Α δεν βρίσκονται δίπλα – δίπλα.
- ζ)** Τα φωνήεντα και τα σύμφωνα εναλλάσσονται.

Λύση

Έχουμε 6 γράμματα εκ των οποίων δύο είναι Α, δύο είναι Κ, ένα είναι Π και ένα είναι Ι.

- α)** Έχουμε $\binom{6}{2, 2, 1, 1} = \frac{6!}{2! 2! 1! 1!} = \frac{720}{4} = 180$ αναγραμματισμούς.

β) Θεωρούμε τα 3 φωνήεντα ως ένα νέο γράμμα π.χ. Φ. Άρα έχουμε 2 Κ, 1 Π, 1 Φ. Άρα είναι σαν να έχουμε 4 γράμματα, οπότε θα έχουμε $\binom{4}{2, 1, 1} = \frac{4!}{2! 1! 1!} = \frac{24}{2} = 12$ αναγραμματισμούς.

Σε κάθε έναν από τους προηγούμενους αναγραμματισμούς υπάρχει το Φ, που αποτελείται από 2 Α και ένα Ι. Αυτά τα 3 γράμματα, αν μετατεθούν με επανάληψη, θα δώσουν $\binom{3}{2, 1} = \frac{3!}{2! 1!} = 3$

αναγραμματισμούς.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή θα έχουμε $12 \cdot 3 = 36$ αναγραμματισμούς.

γ) Όπως στο (β) ερώτημα είχαμε δύο Α και ένα Ι, έτσι και εδώ έχουμε για τα σύμφωνα δύο Κ και ένα Π, οπότε το αποτέλεσμα είναι ακριβώς το ίδιο με το (β) ερώτημα. Άρα έχουμε 36 αναγραμματισμούς.

δ) Θεωρούμε όλα τα φωνήεντα ως ένα νέο γράμμα Φ και όλα τα σύμφωνα ως ένα νέο γράμμα Σ. Προφανώς η μετάθεσή τους δίνει $2! = 2$ περιπτώσεις. Όμως τα 2 Α και το 1 Ι δίνουν, όπως είδαμε στο (β) ερώτημα, 3 διαφορετικές μεταθέσεις και ομοίως τα 2 Κ με το 1 Π δίνουν 3 διαφορετικές μεταθέσεις. Άρα, από την πολλαπλασιαστική αρχή, θα έχουμε $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ διαφορετικούς αναγραμματισμούς.

ε) Έχουμε $\frac{\text{Κ}}{\quad} \frac{\quad}{\quad} \frac{\quad}{\quad} \frac{\text{Ι}}{\quad}$. Μένουν 4 κενές θέσεις για να τοποθετηθούν 2 Α, 1 Κ, 1 Π. Άρα προκύπτουν $\binom{4}{2, 1, 1} = \frac{4!}{2! 1! 1!} = \frac{24}{2} = 12$ αναγραμματισμοί.

στ) Έστω ότι τα 2 Α βρίσκονται δίπλα – δίπλα και ότι τα θεωρούμε σαν ένα νέο γράμμα έστω

Α*. Έχουμε τώρα 2 Κ, 1 Α*, 1 Π, 1 Ι. Άρα οι αναγραμματισμοί που θα προκύψουν είναι

$$\binom{5}{2, 1, 1, 1} = \frac{5!}{2! 1! 1! 1!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Τα 2 Α δεν δίνουν διαφορετικούς αναγραμματισμούς αν μετατεθούν.

Επομένως στους 60 από τους 180 αναγραμματισμούς, που είχαμε χωρίς περιορισμό, τα Α βρίσκονται δίπλα – δίπλα. Άρα στους $180 - 60 = 120$ αναγραμματισμούς τα Α δεν βρίσκονται δίπλα – δίπλα.

ζ) Αφού τα φωνήεντα και τα σύμφωνα εναλλάσσονται, θα έχουμε τις δύο περιπτώσεις που φαίνονται παρακάτω:

$$\frac{\Phi}{\quad} \frac{\Sigma}{\quad} \frac{\Phi}{\quad} \frac{\Sigma}{\quad} \frac{\Phi}{\quad} \frac{\Sigma}{\quad} \quad \frac{\Sigma}{\quad} \frac{\Phi}{\quad} \frac{\Sigma}{\quad} \frac{\Phi}{\quad} \frac{\Sigma}{\quad} \frac{\Phi}{\quad}$$

Σε καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις, οι τρεις θέσεις που θα τοποθετηθούν τα σύμφωνα και οι 3 θέσεις που θα τοποθετηθούν τα φωνήεντα είναι προκαθορισμένες. Στο πρώτο σχήμα έχουμε τα φωνήεντα στις θέσεις 1^η, 3^η, 5^η. Άρα έχουμε 3 θέσεις στις οποίες θα τοποθετήσουμε 2 Α και 1 Ι κατά

$$\binom{3}{2, 1} = \frac{3!}{2! 1!} = 3 \text{ τρόπους.}$$

Όμοια και η τοποθέτηση στις 3 θέσεις 2^η, 4^η, 6^η των συμφώνων, των 2 Κ και του 1 Π, γίνεται με

$$\binom{3}{2, 1} = \frac{3!}{2! 1!} = 3 \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

Επομένως στο πρώτο σχήμα, από την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε $3 \cdot 3 = 9$ διαφορετικούς αναγραμματισμούς. Το ίδιο πλήθος αναγραμματισμών έχουμε και στο δεύτερο σχήμα. Η τελική απάντηση λοιπόν είναι ότι μπορούν να γίνουν $9 + 9 = 18$ αναγραμματισμοί.

K.2.2 Έστω ότι έχουμε 5 μαύρες (M), 6 κόκκινες (K) και 4 πράσινες (Π) μπάλες, τις οποίες τοποθετούμε σε μία σειρά. Να βρεθεί:

- α)** με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν στη σειρά οι 15 μπάλες.
- β)** σε πόσους διαφορετικούς τρόπους όλες οι μαύρες μπάλες βρίσκονται μαζί (δίπλα – δίπλα).
- γ)** σε πόσους διαφορετικούς τρόπους 3 πράσινες μπάλες βρίσκονται δίπλα – δίπλα, ενώ η τέταρτη πράσινη δεν είναι δίπλα στην ομάδα των 3 πράσινων.
- δ)** σε πόσους διαφορετικούς τρόπους όλες οι μαύρες μπάλες βρίσκονται δίπλα – δίπλα και όλες οι κόκκινες επίσης δίπλα – δίπλα.
- ε)** σε πόσους διαφορετικούς τρόπους όλες οι μαύρες μπάλες βρίσκονται δίπλα – δίπλα, όλες οι κόκκινες βρίσκονται δίπλα – δίπλα και όλες οι πράσινες βρίσκονται δίπλα – δίπλα.

Λύση

Έχουμε 15 μπάλες, 5 M, 6 K και 4 Π.

α) Οι 15 μπάλες μπαίνουν στη σειρά με $\binom{15}{5, 6, 4} = \frac{15!}{5! 6! 4!} = 630.630$ διαφορετικούς τρόπους.

β) Θεωρούμε τις πέντε μαύρες μπάλες ως μία νέα μπάλα, έστω M*. Έχουμε λοιπόν τώρα 1 M*, 6 K, 4 Π.

Άρα έχουμε $\binom{1+6+4}{1, 6, 4} = \binom{11}{1, 6, 4} = \frac{11!}{1! 6! 4!} = 2.310$ διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης (οι

μεταθέσεις των 5 μαύρων μπαλών δε δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα).

γ) Θεωρούμε τις 3 πράσινες μπάλες ως μία νέα μπάλα, έστω Π*. Άρα έχουμε 5 M, 6 K, 1 Π*, 1 Π.

Τοποθετούμε σε σειρά τις 5M, 6K και 1Π*. Επομένως έχουμε $\frac{(5+6+1)!}{5!6!1!} = \frac{12!}{5!6!}$ διαφορετικούς

τρόπους τοποθέτησης. Αραιώνουμε τις 12 μπάλες, οπότε αυτές δημιουργούν $12+1=13$ κενά. Η

τελευταία πράσινη μπάλα, δεν μπορεί να βρίσκεται δίπλα στην 3-άδα των πράσινων μπαλών. Άρα η

τελευταία πράσινη μπάλα έχει $13-2=11$ επιλογές. Τελικά οι τρόποι είναι σε πλήθος $\frac{12!11}{5!6!} = 60984$.

δ) Θεωρούμε τις 5 μαύρες μπάλες ως μία νέα μαύρη μπάλα, έστω M*, και τις 6 κόκκινες ως μία νέα

κόκκινη μπάλα, έστω K*. Άρα έχουμε 1 M*, 1K*, 4 Π μπάλες να τοποθετηθούν σε σειρά. Αυτό γίνεται με

$\binom{6}{1, 1, 4} = \frac{6!}{1! 1! 4!} = 30$ διαφορετικούς τρόπους.

ε) Θεωρούμε τις 5 μαύρες μπάλες ως μία, έστω M*, τις 6 κόκκινες ως μία, έστω K* και τις 4 πράσινες ως

μία, έστω Π*. Άρα έχουμε $\binom{3}{1, 1, 1} = \frac{3!}{1! 1! 1!} = 3! = 6$ διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης.

Κ.2.3 Αν χρησιμοποιήσουμε το ψηφίο 4 τρεις φορές, το ψηφίο 5 δύο φορές και το ψηφίο 6 δύο φορές, θα σχηματίσουμε 7-ψήφιους αριθμούς.

- α)** Πόσους διαφορετικούς 7-ψήφιους αριθμούς σχηματίζουμε;
β) Αν και τα τρία 4 βρεθούν δίπλα – δίπλα, πόσοι διαφορετικοί 7-ψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται;
γ) Αν τα δύο 4 βρεθούν δίπλα – δίπλα και το τρίτο 4 όχι δίπλα σ' αυτά, πόσοι διαφορετικοί 7-ψήφιοι σχηματίζονται;
δ) Αν τα τρία 4 βρεθούν δίπλα – δίπλα και τα δύο πεντάρια βρεθούν δίπλα – δίπλα καθώς και τα δύο 6 βρεθούν δίπλα – δίπλα, πόσοι διαφορετικοί 7-ψήφιοι σχηματίζονται; Να γραφούν οι αριθμοί που προκύπτουν στην περίπτωση αυτή.

Λύση

Για καλύτερη κατανόηση συμβολίζουμε το ψηφίο 4 ως A, το ψηφίο 5 ως B και το ψηφίο 6 ως Γ. Έχουμε λοιπόν στη διάθεσή μας 3 A, 2 B και 2 Γ.

α) Όλοι οι 7-ψήφιοι είναι $\binom{7}{3, 2, 2} = \frac{7!}{3! 2! 2!} = 210$.

β) Θεωρούμε τα 3 A ως ένα νέο γράμμα, έστω A*. Άρα έχουμε 1 A*, 2 B, 2 Γ, οι οποίοι δίνουν

$$\binom{5}{1, 2, 2} = \frac{5!}{1! 2! 2!} = \frac{120}{4} = 30 \text{ 7-ψήφιους αριθμούς} \quad (1).$$

γ) Θεωρούμε τα 2 A ως ένα νέο γράμμα, έστω A*. Το 1 A* με τα 2 B και τα 2 Γ είναι 5 γράμματα και μπαίνουν στη σειρά με $\frac{5!}{1! 2! 2!} = \frac{5!}{4} = 30$ τρόπους. Τα $\boxed{A A}$, B, B, Γ, Γ είναι 6 γράμματα, οπότε

δημιουργούν 7 κενά μεταξύ τους για να τοποθετηθεί το τρίτο A. Όμως το τρίτο A δεν μπορεί να τοποθετηθεί ούτε μεταξύ των 2 A $\boxed{A A}$, ούτε αριστερά τους, ούτε δεξιά τους. Άρα από τις 7 θέσεις, μένουν για τοποθέτηση $7 - 3 = 4$ θέσεις του A, οπότε οι τρόποι θα είναι $30 \cdot 4 = 120$.

δ) Θεωρούμε τα 3 A ως ένα γράμμα, έστω A*, τα 2 B ως ένα B* και τα 2 Γ ως ένα Γ*. Έχουμε λοιπόν 1 A*, 1 B* και 1 Γ*. Επομένως θα προκύψουν $\frac{3!}{1! 1! 1!} = 6$ διαφορετικοί αριθμοί. Οι

αριθμοί αυτοί είναι οι:

4445566, 4446655, 5544466, 5566444, 6644455, 6655444.

4.3 Διαμέριση συνόλου – Διαίρεση συνόλου

Ορισμός

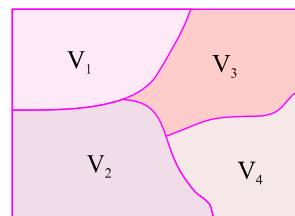
Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ με n στοιχεία ($A \neq \emptyset$). **Διαμέριση ή διαμερισμός**

ή **διαμελισμός** του μη κενού συνόλου A λέγεται ένα νέο σύνολο V που αποτελείται από υποσύνολα του A , ξένα μεταξύ τους ανά δύο, των οποίων η ένωση μας δίνει το αρχικό σύνολο A . Δηλαδή έχουμε:

$$V = \{\cup V_i\} \text{ με } V_i \subseteq A \quad \forall i \text{ και } V_i \cap V_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Παράδειγμα

Μια διαμέριση του συνόλου A σε 4 υποσύνολά του σε διάγραμμα Venn είναι η παρακάτω.



Άρα η διαμέριση εδώ του A είναι το σύνολο:

$$V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}.$$

Σε οποιαδήποτε διαμέριση του συνόλου A , δεν μάς ενδιαφέρει η διάταξη των υποσυνόλων του A , στο οποίο το διαμερίσαμε (το χωρίσαμε), αλλά μόνο ποια είναι τα υποσύνολα στα οποία το χωρίσαμε.

Ορισμός 1

Διαμέριση ενός μη κενού συνόλου A σε p υποσύνολά του, λέγεται ο χωρισμός του συνόλου A σε p **μη διατεταγμένα** υποσύνολά του, που το καθένα απ' αυτά είναι διάφορο του κενού, ανά δύο είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους μας δίνει το σύνολο A .

Η διαμέριση ενός συνόλου A με n στοιχεία σε p υποσύνολά του, συμβολίζεται με $P(n, p)$.

Ορισμός 2

Έστω ότι έχουμε το μη κενό σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ με n στοιχεία. Αν χωρίσουμε το A σε p υποσύνολά του μη κενά, ανά δύο ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους μας δώσει το A , αλλά τα υποσύνολά τα θεωρούμε διατεταγμένα, τότε οποιαδήποτε διατεταγμένη p -άδα από τα p αυτά υποσύνολα λέγεται **διαίρεση** του συνόλου A σε p υποσύνολα.

Η διαίρεση ενός συνόλου A με n στοιχεία σε p υποσύνολά του, συμβολίζεται με $D(n, p)$.

Έχουμε για τη διαμέριση του A σε ρ υποσύνολά του τον συμβολισμό $P(v, \rho)$ και για τη διαίρεσή του σε ρ υποσύνολά του τον $D(v, \rho)$. Επειδή όμως στη διαμέριση δεν έχουμε διάταξη των ρ υποσυνόλων, ενώ στην διαίρεση έχουμε διάταξη των ρ υποσυνόλων, από οποιαδήποτε διαμέριση του συνόλου A θα προκύπτουν $\rho!$ διαιρέσεις του συνόλου A . Άρα θα έχουμε γενικά:

$$D(v, \rho) = \rho! P(v, \rho)$$

Όταν διαμερίζουμε ή διαιρούμε ένα σύνολο A με v στοιχεία (αντικείμενα) σε ρ υποσύνολά του δεν σημαίνει υποχρεωτικά ότι τα υποσύνολα αποτελούνται από διαφορετικό πλήθος αντικειμένων. Μπορεί κάποια υποσύνολα να έχουν τον ίδιο αριθμό αντικειμένων. Μπορεί ακόμα και όλα τα υποσύνολα να έχουν τον ίδιο αριθμό αντικειμένων. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για χωρισμό του A σε ρ ισοπληθή υποσύνολα.

Απλά παραδείγματα στη διαμέριση και στη διαίρεση συνόλου

1. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Αν διαμερίσουμε ή διαιρέσουμε το σύνολο A σε δύο υποσύνολά του, να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών διαμερίσεων και διαιρέσεων του όταν:

(α) τα υποσύνολα περιέχουν 1 και 3 στοιχεία το καθένα,

(β) Όταν τα υποσύνολα περιέχουν από δύο στοιχεία το καθένα.

Λύση

(α) Για τη διαμέριση μπορώ να πάρω στο ένα σύνολο οποιοδήποτε στοιχείο από τα 4 με $\binom{4}{1} = 4$

διαφορετικούς τρόπους, οπότε το άλλο σύνολο είναι κάθε φορά γνωστό. Έχουμε λοιπόν 4 διαμερίσεις, τις:

$$V = \{ \langle \{\alpha_1\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \rangle, \langle \{\alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\} \rangle, \langle \{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\} \rangle, \langle \{\alpha_4\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \rangle \}$$

Επειδή από κάθε διαμέριση προκύπτουν $2!$ διαιρέσεις, το πλήθος των διαιρέσεων θα είναι $2! \cdot 4 = 8$ και είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} & \{ (\{\alpha_1\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}), (\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_1\}), (\{\alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}), \\ & (\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_2\}), (\{\alpha_3\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}), (\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}, \{\alpha_3\}), \\ & (\{\alpha_4\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}), (\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_4\}) \}. \end{aligned}$$

(β) Για τις διαμερίσεις το ένα σύνολο θα έχει 2 στοιχεία που, αν τα βρούμε, θα ξέρουμε το άλλο σύνολο ποια στοιχεία θα έχει. Άρα φαίνεται ότι πρέπει να πάρουμε από τα 4 στοιχεία τα 2 και αυτό μπορούμε να το κάνουμε με $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ τρόπους. Ας προσπαθήσουμε να τις βρούμε:

	Το ένα υποσύνολο	Το άλλο υποσύνολο
1 ^η	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$	$\{\alpha_3, \alpha_4\}$
2 ^η	$\{\alpha_1, \alpha_3\}$	$\{\alpha_2, \alpha_4\}$
3 ^η	$\{\alpha_1, \alpha_4\}$	$\{\alpha_2, \alpha_3\}$
4 ^η	$\{\alpha_2, \alpha_3\}$	$\{\alpha_1, \alpha_4\}$
5 ^η	$\{\alpha_2, \alpha_4\}$	$\{\alpha_1, \alpha_3\}$
6 ^η	$\{\alpha_3, \alpha_4\}$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$

Παρατηρούμε εδώ ότι κάποιες διαμερίσεις είναι μετρημένες δύο φορές. Η 1^η είναι ίδια με την 6^η, η 2^η με την 5^η και η 3^η με την 4^η. Επομένως οι διαμερίσεις δεν είναι 6 αλλά 3. Το σωστό αποτέλεσμα εδώ είναι:

$$\frac{\binom{4}{2}}{2!} = \frac{4!}{2! (2!)^2}$$

Το λάθος αποτέλεσμα, που νομίζαμε ότι είναι το αποτέλεσμα των διαμερίσεων, είναι τελικά το αποτέλεσμα των διαιρέσεων.

2. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$. Διαμερίζουμε και διαιρούμε το σύνολο A σε τρία υποσύνολα με πλήθος στοιχείων:

(α) 3, 2, 1 ανά σύνολο,

(β) 2, 2, 2 ανά σύνολο,

(γ) 4, 1, 1 ανά σύνολο.

Να βρεθούν σε κάθε περίπτωση το πλήθος των διαμερίσεων και των διαιρέσεων.

Λύση

(α) Επειδή είναι $3 \neq 2 \neq 1$, το πλήθος των διαμερίσεων είναι ίσο με:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} = \frac{6!}{3! 2! 1!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2} = 10$$

και το πλήθος των διαιρέσεων είναι $10 \cdot 3! = 60$ (το 3! είναι η διάταξη των τριών υποσυνόλων).

(β) Για τη διαμέριση θα είχαμε επιλογές $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{6!}{2! 2! 2!}$. Είδαμε όμως στο παράδειγμα 1 ότι

δεν είναι αυτό το σωστό αποτέλεσμα. Ας πάρουμε π.χ. τη διαμέριση $\{\{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_3, \alpha_4\}, \{\alpha_5, \alpha_6\}\}$.

Τα τρία υποσύνολα, αν αλλάξουν θέσεις μεταξύ τους, δεν δίνουν διαφορετικές διαμερίσεις. Αν τα τρία υποσύνολα αλλάζουν θέση (δηλαδή διαταχτούν (δηλαδή μετατεθούν), θα δώσουν 3! διαφορετικά

αποτελέσματα. Επομένως οι διαμερίσεις είναι $\frac{6!}{2! 2! 2! (3!)} = \frac{6!}{3! (2!)^3} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 8} = 15$. Άρα οι διαιρέσεις είναι $15 \cdot 3! = 15 \cdot 6 = 90$.

γ) Έχουμε για τις διαμερίσεις $\frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{1}{1}}{2!}$ (το $2!$ προκύπτει από τη διαμέριση σε 2 υποσύνολα του συνόλου με ίσο αριθμό αντικειμένων (από 1 αντικείμενο στο κάθε σύνολο). Άρα έχουμε ως αποτέλεσμα:

$$\frac{6!}{4! 2! (1!)^2} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2} = 5 \cdot 3 = 15$$

Οι διαιρέσεις φυσικά είναι πάντα $r!P(v, r)$, δηλαδή $15 \cdot 3! = 15 \cdot 6 = 90$.

3. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v\}$ και θέλουμε να το διαμερίσουμε και να το διαιρέσουμε σε r ισοπληθή υποσύνολα. Πόσοι είναι οι τρόποι κάθε φορά;

Λύση

Έστω ότι το κάθε υποσύνολο έχει k στοιχεία. Άρα θα έχουμε $r \cdot k = v$. Οι διαμερίσεις προκύπτουν αν χωρίσουμε το σύνολο A σε r ομάδες (υποσύνολα) και στην κάθε ομάδα (υποσύνολο) έχουμε k αντικείμενα. Άρα θα έχουμε:

$$\binom{v}{k} \binom{v-k}{k} \binom{v-2k}{k} \dots \binom{k}{k} = \frac{v!}{\underbrace{k! k! \dots k!}_{r \text{ παράγοντες}}}$$

Όμως οποιαδήποτε απ' αυτές τις διαμερίσεις, την έχουμε μετρήσει $r!$ φορές (οι μεταθέσεις των ομάδων).

Τελικά λοιπόν έχουμε $\frac{v!}{r! (k!)^r}$ διαμερίσεις και $\frac{v!}{r! (k!)^r} \cdot r! = \frac{v!}{(k!)^r}$ διαιρέσεις.

4. Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο A με v στοιχεία ($v \geq 1$). Αν διαμερίσουμε ή διαιρέσουμε το σύνολο A σε r υποσύνολα τέτοια, ώστε r_1 από αυτά τα υποσύνολα να περιέχουν από k_1 αντικείμενα, r_2 υποσύνολα να περιέχουν από k_2 αντικείμενα κ.λπ. και r_λ υποσύνολα να περιέχουν από k_λ αντικείμενα με $r_1 + r_2 + \dots + r_\lambda = r$ και:

$$r_1 \cdot k_1 + r_2 \cdot k_2 + \dots + r_\lambda \cdot k_\lambda = v$$

με $k_i \neq k_j$ για κάθε $i \neq j$ από 1 ως λ , να βρεθεί το πλήθος των διαμερίσεων και των διαιρέσεων του συνόλου A .

Λύση

Πρώτα χωρίζουμε το σύνολο A σε λ υποσύνολα, έστω τα $A_1, A_2, \dots, A_\lambda$ που περιέχουν $r_1 k_1, r_2 k_2, \dots, r_\lambda k_\lambda$ στοιχεία το καθένα από αυτά. Ο χωρισμός αυτός γίνεται κατά τα γνωστά με

$$\frac{v!}{(\rho_1 \kappa_1)! (\rho_2 \kappa_2)! \dots (\rho_\lambda \kappa_\lambda)!}.$$

Στη συνέχεια τα στοιχεία του κάθε συνόλου από τα $A_1, A_2, \dots, A_\lambda$ τα διαμερίζουμε σε $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\lambda$ υποσύνολα, αλλά στο καθένα από αυτά έχουμε ισοπληθείς διαμερίσεις. Για το A_1 π.χ. θα έχουμε

$\frac{(\rho_1 \kappa_1)!}{\rho_1! (\kappa_1!)^{\rho_1}}$ τρόπους διαμέρισης. Άρα οι διαμερίσεις θα είναι τελικά:

$$P_v(v, \rho) = \frac{v!}{(\rho_1 \kappa_1)! (\rho_2 \kappa_2)! \dots (\rho_\lambda \kappa_\lambda)!} \cdot \frac{(\rho_1 \kappa_1)!}{\rho_1! (\kappa_1!)^{\rho_1}} \cdot \frac{(\rho_2 \kappa_2)!}{\rho_2! (\kappa_2!)^{\rho_2}} \dots \frac{(\rho_\lambda \kappa_\lambda)!}{\rho_\lambda! (\kappa_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \quad \text{ή}$$

$$P_v(v, \rho) = \frac{v!}{\rho_1! (\kappa_1!)^{\rho_1} \rho_2! (\kappa_2!)^{\rho_2} \dots \rho_\lambda! (\kappa_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \quad (1)$$

Για τις διαιρέσεις φυσικά θα έχουμε $D_v(v, \rho) = \rho! P(v, \rho)$, δηλαδή:

$$D_v = \frac{v!}{\rho_1! (\kappa_1!)^{\rho_1} \rho_2! (\kappa_2!)^{\rho_2} \dots \rho_\lambda! (\kappa_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \cdot \rho! \quad (2)$$

4.4 Διανομή αντικειμένων σε άτομα ή κατανομή αντικειμένων σε διακεκριμένα κελιά

Έστω ότι έχουμε v αντικείμενα ταυτόσημα ή διακεκριμένα και θέλουμε να τα τοποθετήσουμε σε k διακεκριμένα κελιά με τέτοιο τρόπο, ώστε κ_0 κελιά να μένουν άδεια, κ_1 κελιά να έχουν από v_1 αντικείμενα το κάθε κελί, κ_2 κελιά να έχουν από v_2 αντικείμενα το κάθε κελί κ.ο.κ. μέχρι τα κ_p κελιά να έχουν v_p αντικείμενα το κάθε κελί με $v_i \neq v_j$ για κάθε $i \neq j$ από 1 έως και το p ,

$$\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_p = k \text{ και:}$$

$$\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \dots + \kappa_p v_p = v.$$

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα v αντικείμενα στα k κελιά;

Λύση

Επιλέγουμε από τα k κελιά τα κ_0 που θα μένουν άδεια. Μετά επιλέγουμε από τα $k - \kappa_0$ κελιά που περίσσεψαν, τα κ_1 κελιά στα οποία θα βάλουμε από v_1 αντικείμενα στο καθένα κ.λπ., μέχρι να μείνουν τα κ_p κελιά στα οποία θα βάλουμε από v_p αντικείμενα στο καθένα. Οι τρόποι με τους οποίους γίνεται αυτή η διαδικασία είναι σε πλήθος:

$$\frac{k!}{\kappa_0! \kappa_1! \kappa_2! \dots \kappa_p!} \quad (1)$$

Αν τα αντικείμενα είναι ταυτόσημα, ο τύπος (1) δίνει τους τρόπους τοποθέτησης των v ταυτόσημων αντικειμένων στα k διακεκριμένα κελιά.

Αν τα αντικείμενα είναι διακεκριμένα, τότε επειδή γνωρίζουμε πόσα αντικείμενα έχει κάθε κελί απ' αυτά που περιέχουν αντικείμενα, επιλέγουμε τον αντίστοιχο αριθμό αντικειμένων που δικαιούται το κάθε κελί και τα τοποθετούμε στο κελί. Είναι γνωστό ότι το πλήθος των τρόπων με τους οποίους γίνεται αυτό είναι:

$$\frac{v!}{(v_1!)^{\kappa_1} (v_2!)^{\kappa_2} \dots (v_p!)^{\kappa_p}} \quad (2).$$

Από την πολλαπλασιαστική αρχή και από τους τύπους (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{v!}{\kappa_0! \cdot \kappa_1! \cdot (v_1!)^{\kappa_1} \cdot \kappa_2! \cdot (v_2!)^{\kappa_2} \dots \kappa_p! \cdot (v_p!)^{\kappa_p}} \cdot k! \text{ τρόπους.}$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\frac{v!}{\kappa_0! \cdot (0!)^{\kappa_0} \cdot \kappa_1! \cdot (v_1!)^{\kappa_1} \cdot \kappa_2! \cdot (v_2!)^{\kappa_2} \dots \kappa_p! \cdot (v_p!)^{\kappa_p}} \cdot k!$$

ο οποίος θυμίζει διαίρεση των n διακεκριμένων αντικειμένων σε k ομάδες. Εδώ βέβαια βλέπουμε ότι υπάρχουν k_0 ομάδες, που δεν έχουν αντικείμενο (καταχρηστικά τις θεωρούμε ως ομάδες για να είναι εύκολη η χρήση του τύπου σε ασκήσεις).

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε 8 διακεκριμένα αντικείμενα και θέλουμε να τα δώσουμε σε 9 παιδιά με κατανομή της μορφής: $\langle 2, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, 0 \rangle$. Με πόσους τρόπους μπορούμε να το κάνουμε;

Λύση

Έχουμε 3 ομάδες των 2 αντικειμένων η καθεμία, 2 ομάδες του 1 αντικειμένου η καθεμία και 4 ομάδες των 0 αντικειμένων η κάθε μία. Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{8!}{3! (2!)^3 \cdot 2! (1!)^2 \cdot 4! (0!)^4} \cdot 9! = \frac{8! 9!}{6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 24} = 6.350.400 \text{ τρόπους.}$$

Αν τα αντικείμενα ήταν ταυτόσημα θα είχαμε $\frac{9!}{3! 2! 4!} = 1.260$ τρόπους.

4.5 Εφαρμογές στη διαμέριση και στη διαίρεση συνόλου

Κ.5.1 Έχουμε 10 άτομα και τα χωρίζουμε σε δύο ομάδες των τριών ατόμων η καθεμία και 2 ομάδες των 2 ατόμων η καθεμία. Να βρεθεί πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι σχηματισμού των παραπάνω ομάδων αν:

- α) Δεν μας ενδιαφέρει η διάταξη των ομάδων.
- β) Μας ενδιαφέρει η διάταξη των ομάδων.

Λύση

α) Πρόκειται για διαμέριση $P(10, 4)$. Άρα έχουμε:

$$P(10, 4) = \frac{10!}{2! (3!)^2 \cdot 2! (2!)^2} = \frac{10!}{2 \cdot 36 \cdot 2 \cdot 4} = 6.300 \text{ διαφορετικούς τρόπους}$$

β) Πρόκειται για διαίρεση $D(10, 4)$. Άρα έχουμε:

$$D(10, 4) = P(10, 4) \cdot 4! = 6.300 \cdot 24 = 151.200 \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

Κ.5.2 Έχουμε 12 άτομα και με αυτά φτιάχνουμε ομάδες των 2 και των 3 ατόμων. Το πλήθος των ομάδων τόσο των 2 ατόμων όσο και των 3 ατόμων είναι θετικοί αριθμοί (δηλαδή δεν φτιάχνουμε μόνο ομάδες των 2 ατόμων ή μόνο ομάδες των 3 ατόμων).

- α) Πόσες ομάδες των 2 ατόμων και πόσες ομάδες των 3 ατόμων φτιάχνουμε;

β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε τα 12 άτομα του (α) ερωτήματος, αν η διάταξη των ομάδων δεν μάς ενδιαφέρει και με πόσους αν η διάταξη των ομάδων μάς ενδιαφέρει;

Λύση

α) Έστω x το πλήθος των ομάδων με 2 άτομα η καθεμία και y το πλήθος των ομάδων με 3 άτομα η καθεμία. Άρα έχουμε την εξίσωση $2x + 3y = 12$ και ζητάμε τις ακέραιες και θετικές λύσεις της.

Η εξίσωση $2x + 3y = 12$ είναι διοφαντική εξίσωση 1^{ου} βαθμού και εύκολα διαπιστώνουμε ότι η μόνη λύση με τους περιορισμούς που δόθηκαν είναι $(x, y) = (3, 2)$.

Άρα φτιάχνουμε 3 ομάδες των δύο ατόμων και 2 ομάδες των τριών ατόμων. Σύνολο: 5 ομάδες.

β) Αν η διάταξη των ομάδων δεν μας ενδιαφέρει έχουμε διαμέριση με αποτέλεσμα:

$$P(12, 5) = \frac{10!}{3! (2!)^3 \cdot 2! (3!)^2} = \frac{12!}{6 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 36} = 138.600 \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

Αν η διάταξη μας ενδιαφέρει, έχουμε διαίρεση και το αποτέλεσμα θα είναι:

$$D(12, 5) = P(12, 5) \cdot 5! = 16.632.000 \text{ διαφορετικοί τρόποι.}$$

Κ.5.3 Στην κλήρωση των ομίλων του Τσάμπιονς Λιγκ ποδοσφαίρου μετέχουν 32 ομάδες. Οι ομάδες αυτές θα σχηματίσουν 8 ομίλους των τεσσάρων ομάδων ο καθένας. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι σχηματισμού των 8 ομίλων υπάρχουν;

Λύση

Έχουμε 32 ομάδες και αυτές θα τις χωρίσουμε σε 8 ομίλους των 4 ομάδων ο καθένας. Το πρόβλημα εδώ είναι αν οι 8 όμιλοι διατάσσονται ή όχι. Όπως γνωρίζουμε, οι όμιλοι χαρακτηρίζονται ως 1^{ος}, 2^{ος}, 3^{ος}, ..., 8^{ος}. Άρα φαίνεται να έχουμε διάταξη των 8 ομίλων.

Στην πραγματικότητα όμως η ονομασία 1^{ος} όμιλος, 2^{ος} όμιλος, 3^{ος} όμιλος, ..., 8^{ος} όμιλος δεν έχει καμία σημασία. Η ονομασία θα είχε σημασία αν π.χ. οι αγώνες του κάθε ομίλου γίνονταν σε συγκεκριμένη πόλη, όπως γίνεται στο Μουντιάλ ποδοσφαίρου.

Η απάντηση λοιπόν είναι ότι πρόκειται για διαμέριση $P(32, 8)$ και οι τρόποι σχηματισμού θα ήταν

$$\frac{32!}{8! (4!)^8}.$$

Αν μετρούσε και η διάταξη όπως στο μουντιάλ, θα είχαμε διαίρεση $D(32, 8) = \frac{32!}{(4!)^8}.$

Κ.5.4 Σε ένα κέντρο νεοσύλλεκτων στρατιωτών παρουσιάστηκαν 120 άτομα. Μετά την υποχρεωτική εκπαίδευσή τους θα αποσταλούν να επανδρώσουν 30 τάγματα ως εξής: 10 συγκεκριμένα τάγματα θα λάβουν από 5 στρατιώτες το καθένα, 10 άλλα επίσης συγκεκριμένα τάγματα θα λάβουν από 4 στρατιώτες το καθένα και τα υπόλοιπα 10 τάγματα θα λάβουν από 3 στρατιώτες το καθένα. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν για να επανδρωθούν τα 30 τάγματα;

Λύση

Τα 10 τάγματα, τα οποία θα λάβουν από 5 στρατιώτες το καθένα, τα θεωρούμε ως μία ομάδα ταγμάτων, π.χ. τάγματα του Έβρου (Ε). Τα 10 τάγματα, που το καθένα θα λάβει από 4 στρατιώτες, τα θεωρούμε ως μία άλλη ομάδα ταγμάτων, π.χ. τάγματα των νησιών του Αιγαίου (Α). Τέλος, τα άλλα 10 τάγματα, τα οποία θα λάβουν από 3 άτομα το καθένα, τα θεωρούμε ως μία άλλη ομάδα ταγμάτων, π.χ. τάγματα της Μακεδονίας (Μ).

Στην ομάδα των ταγμάτων του Έβρου θα σταλούν $10 \cdot 5 = 50$ στρατιώτες. Στην ομάδα των ταγμάτων των νησιών του Αιγαίου θα σταλούν $10 \cdot 4 = 40$ στρατιώτες. Τέλος, στην ομάδα των ταγμάτων της Μακεδονίας θα σταλούν $10 \cdot 3 = 30$ στρατιώτες. Άρα θα πάρουμε από τους 120 στρατιώτες πρώτα π.χ. τους 50, μετά τους 40 και μετά τους 30. Αυτό γίνεται με:

$$\binom{120}{50} \cdot \binom{70}{40} \cdot \binom{30}{30} = \frac{120!}{50! 70!} \cdot \frac{70!}{40! 30!} \cdot 1 = \frac{120!}{50! 40! 30!} \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

(Η σειρά με την οποία παίρνουμε τα άτομα της κάθε ομάδας δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.)

Πρέπει όμως τώρα να βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους τα άτομα της κάθε ομάδας θα μοιραστούν στα 10 τάγματα της ομάδας τους. Για την ομάδα των ταγμάτων του Έβρου έχουμε 50 στρατιώτες να μοιραστούν σε 10 διακεκριμένα τάγματα, από 5 στρατιώτες στο κάθε τάγμα. Επομένως έχουμε $\frac{50!}{(5!)^{10}}$ διαφορετικούς τρόπους μοιράσματος των στρατιωτών στα τάγματα.

Ομοίως για τα τάγματα των νησιών του Αιγαίου θα έχουμε $\frac{40!}{(4!)^{10}}$ διαφορετικούς τρόπους και για τα τάγματα της Μακεδονίας θα έχουμε $\frac{30!}{(3!)^{10}}$ διαφορετικούς τρόπους.

Επομένως το τελικό αποτέλεσμα θα είναι:

$$\frac{120!}{50! 40! 30!} \cdot \frac{50!}{(5!)^{10}} \cdot \frac{40!}{(4!)^{10}} \cdot \frac{30!}{(3!)^{10}} = \frac{120!}{(5! 4! 3!)^{10}}.$$

Παρατήρηση

Θα μπορούσαμε να σκεφτούμε ότι:

(α) Από τους 120 στρατιώτες επιλέγουμε τους 50 που θα πάνε στα τάγματα του Έβρου και τους μοιράζουμε στα 10 τάγματα του Έβρου.

(β) Επιλέγουμε από τους $120 - 50 = 70$ στρατιώτες που έμειναν τους 40 που θα πάνε στα τάγματα των νησιών του Αιγαίου και τους μοιράζουμε στα 10 τάγματα των νησιών του Αιγαίου και τέλος

(γ) τους 30 στρατιώτες που έμειναν τους μοιράζουμε στα 10 τάγματα της Μακεδονίας.

Άρα θα είχα αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} & \binom{120}{50} \cdot \frac{50!}{(5!)^{10}} \cdot \binom{70}{20} \cdot \frac{40!}{(4!)^{10}} \cdot \binom{30}{30} \cdot \frac{30!}{(3!)^{10}} = \\ & = \frac{120!}{\cancel{50!} \cdot \cancel{70!}} \cdot \frac{\cancel{50!}}{(5!)^{10}} \cdot \frac{\cancel{70!}}{\cancel{40!} \cdot \cancel{30!}} \cdot \frac{\cancel{40!}}{(4!)^{10}} \cdot 1 \cdot \frac{\cancel{30!}}{(3!)^{10}} = \frac{120!}{(5! 4! 3!)^{10}}. \end{aligned}$$

Δηλαδή προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα.

K.5.5 Έστω ότι έχουμε πάλι, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, 120 στρατιώτες και θέλουμε να τους τοποθετήσουμε σε 30 τάγματα, ώστε σε 10 τυχαία απ' αυτά και όχι συγκεκριμένα, να πάνε από 5 στρατιώτες στο καθένα. Σε άλλα 10 επίσης τυχαία και όχι συγκεκριμένα τάγματα να πάνε από 4 στρατιώτες στο καθένα και τέλος, στα υπόλοιπα 10 τάγματα να πάνε από 3 στρατιώτες στο καθένα. Ποιο θα ήταν τώρα το αποτέλεσμα;

Λύση

Επειδή δεν γνωρίζουμε σε ποια 10 συγκεκριμένα τάγματα θα πάνε από 5 ή από 4 ή από 3 στρατιώτες, στο κάθε τάγμα θα πρέπει:

Από τα 30 τάγματα να επιλέξουμε τα 10 όπου θα πάνε από 5 στρατιώτες στο καθένα, με $\binom{30}{10}$

διαφορετικούς τρόπους.

Στη συνέχεια επιλέγουμε από τα 20 τάγματα που έμειναν, τα 10 τάγματα όπου θα πάνε από 4 στρατιώτες στο καθένα με $\binom{20}{10}$ διαφορετικούς τρόπους.

Τέλος, από τα υπόλοιπα 10 τάγματα η επιλογή 10 απ' αυτά είναι μοναδική. Άρα θα έχουμε

$$\binom{30}{10} \binom{20}{10} \binom{10}{10} = \binom{30}{10} \binom{20}{10}$$

διαφορετικούς τρόπους να χωρίσουμε 30 τάγματα σε 3 δεκάδες, ώστε να γνωρίζουμε κάθε φορά ποια συγκεκριμένα 10 τάγματα παίρνουν από 5 στρατιώτες το καθένα, ποια συγκεκριμένα 10 τάγματα κάθε φορά παίρνουν από 4 στρατιώτες το καθένα και ποια συγκεκριμένα 10 τάγματα παίρνουμε από 3 στρατιώτες το καθένα. Άρα έχουμε $\binom{30}{10} \binom{20}{10}$ περιπτώσεις και στην καθεμία απ' αυτές από την

προηγούμενη εφαρμογή, $\frac{120!}{(5! 4! 3!)^{10}}$, οπότε το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned} & \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \frac{120!}{(5! 4! 3!)^{10}} = \frac{30!}{10! 20!} \cdot \frac{20!}{10! 10!} \cdot \frac{120!}{(5! 4! 3!)^{10}} = \\ & = \frac{120!}{10! (5!)^{10} \cdot 10! (4!)^{10} \cdot 10! (3!)^{10}} \cdot 30!, \text{ δηλαδή ο γνωστός τύπος διαίρεσης.} \end{aligned}$$

4.6 Τι κάνουμε όταν χωρίζουμε n άτομα σε r ομάδες

Για να αντιμετωπίσουμε προβλήματα στα οποία n άτομα χωρίζονται σε r ομάδες με συγκεκριμένο αριθμό ατόμων ανά ομάδα, πρέπει να ξεκαθαρίσουμε:

- (A) αν γίνεται διάταξη ολική ή μερική στις ομάδες και
- (B) αν γίνεται διάταξη ολική ή μερική στα άτομα της κάθε ομάδας.

Παράδειγμα

10 άτομα θα χωριστούν σε 4 ομάδες ως εξής: Σε 2 ομάδες θα υπάρχουν από 2 άτομα στην κάθε ομάδα και στις άλλες 2 ομάδες θα υπάρχουν από 3 άτομα σε κάθε ομάδα. Ακόμα, σε κάθε ομάδα θα επιλέγεται ένας αρχηγός και η κάθε ομάδα των 2 ατόμων θα πάει να παρακολουθήσει αγώνα ποδοσφαίρου σε ένα από δύο συγκεκριμένα γήπεδα γ_1, γ_2 . Η κάθε ομάδα των 3 ατόμων θα πάει να παρακολουθήσει θέατρο σε ένα από τα δύο συγκεκριμένα θέατρα θ_1, θ_2 . Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Λύση

Ο χωρισμός των 10 ατόμων σε 2 ομάδες των 2 ατόμων η καθεμία και σε άλλες 2 ομάδες των 3 ατόμων η καθεμία χωρίς άλλους περιορισμούς γίνεται με:

$$\frac{10!}{2! (2!)^2 \cdot 2! (3!)^2} = \frac{10!}{(2!)^4 \cdot (3!)^2} = \frac{10!}{16 \cdot 36} = 6.300 \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

Επειδή σε κάθε ομάδα εκλέγεται ένας αρχηγός, στις ομάδες των 2 ατόμων έχουμε ολική διάταξη. Άρα έχουμε $2!$ τρόπους ανά ομάδα. Στις ομάδες των 3 ατόμων έχουμε μερική διάταξη, δηλαδή εκλέγεται ένας αρχηγός από 3 άτομα στην κάθε ομάδα. Άρα στην κάθε ομάδα έχουμε 3 διαφορετικούς τρόπους εκλογής του αρχηγού (όχι ολική διάταξη $3!$). Τελικά οι 4 αρχηγοί εκλέγονται κατά $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ διαφορετικούς τρόπους.

Έχουμε 2 ομάδες να πάνε ανά μία στα γήπεδα γ_1, γ_2 . Αυτό γίνεται με $2!$ διαφορετικούς τρόπους.

Έχουμε ακόμα 2 ομάδες να πάνε ανά μία στα θέατρα θ_1, θ_2 . Αυτό γίνεται με $2!$ διαφορετικούς τρόπους.

Τελικά οι ομάδες μπορούν να βρεθούν στους προορισμούς τους κατά $2! \cdot 2! = 4$ διαφορετικούς τρόπους (όχι πλήρης διάταξη των ομάδων 4!).

Το τελικό αποτέλεσμα είναι ίσο με $6.300 \cdot 36 \cdot 4 = 907.200$ διαφορετικοί τρόποι.

Παρατήρηση

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να λυθεί και ως εξής:

Πρώτα επιλέγουμε από τα 10 άτομα τα 4 που θα είναι οι αρχηγοί των 4 ομάδων. Πώς όμως θα επιλεγούν τα 4 αυτά άτομα; Με συνδυασμούς ή με διατάξεις; Επειδή οι 4 ομάδες θα κατανεμηθούν σε $\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2$, οι 4 αρχηγοί μετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή έχει σημασία σε ποια από τις θέσεις $\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2$ θα βρεθεί ο καθένας. Άρα οι αρχηγοί επιλέγονται με διάταξη των 10 ανά 4, οπότε έχουμε:

$$\Delta_4^{10} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040 \text{ δυνατούς τρόπους.}$$

Όταν επιλεγούν οι 4 αρχηγοί, μένουν ακόμα 6 άτομα να κατανεμηθούν σε 4 ομάδες ως εξής:

$\langle 1, 1, 2, 2 \rangle$. Οι τρόποι εδώ είναι

$$\frac{6!}{2! (1!)^2 \cdot 2! (2!)^2} = \frac{6!}{16} = 45.$$

Τέλος, όπως είδαμε και με τον άλλο τρόπο, οι ομάδες μπορούν να πάνε στις προκαθορισμένες θέσεις με $2 \cdot 2 = 4$ διαφορετικούς τρόπους.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε τελικά:

$$5.040 \cdot 45 \cdot 4 = 907.200 \text{ διαφορετικούς τρόπους.}$$

Παράδειγμα

Στην πλατεία ενός χωριού υπάρχουν 3 παγκάκια με τις ενδείξεις παγκάκι Α, παγκάκι Β, παγκάκι Γ. Το κάθε παγκάκι έχει 5 αριθμημένες θέσεις με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5. Κάποια μέρα βρέθηκαν στην πλατεία 5 άτομα και κάθισαν 2 άτομα σε ένα παγκάκι, 2 άλλα άτομα σε ένα άλλο παγκάκι και 1 άτομο κάθισε μόνο του στο εναπομένον παγκάκι.

(α) Να βρεθούν οι τρόποι, με τους οποίους συνέβη αυτό.

(β) Αν μεταξύ των 5 ατόμων βρίσκονται ο Δημήτρης με τη Σοφία, και με δεδομένο ότι τα άτομα κάθονται στα παγκάκια όπως προηγουμένως, να βρεθεί η πιθανότητα ο Δημήτρης με τη Σοφία να κάθονται στο ίδιο παγκάκι και μάλιστα δίπλα – δίπλα.

Λύση

α) Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα με έναν τρόπο, με τον οποίο θα μπορούσε να συμβεί αυτό που συνέβη.

Το άτομο που θα καθίσει μόνο του σε ένα παγκάκι επιλέγεται από τα 5 άτομα με $\binom{5}{1}$ τρόπους. Το άτομο αυτό στη συνέχεια επιλέγει ένα από τα 3 παγκάκια για να καθίσει. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{3}{1}$ τρόπους. Αφού επέλεξε το παγκάκι που θα καθίσει, θα επιλέξει μετά τη μία από τις 5 θέσεις που έχει το παγκάκι για να καθίσει. Αυτό γίνεται με $\binom{5}{1}$ τρόπους. Από το άτομο λοιπόν που θα καθίσει μόνο του σε ένα παγκάκι έχουμε $\binom{5}{1}\binom{3}{1}\binom{5}{1} = 75$ δυνατότητες.

Στη συνέχεια επιλέγουμε από τα 4 άτομα τα 2 για να καθίσουν σε κάποιο παγκάκι. Η επιλογή αυτή γίνεται με $\binom{4}{2}$ τρόπους. Τα άτομα αυτά στη συνέχεια θα επιλέξουν ένα από τα δύο παγκάκια που είναι άδεια. Αυτό γίνεται με $\binom{2}{1}$ τρόπους. Όταν επιλέξουν το παγκάκι που θα καθίσουν, θα επιλέξουν 2 από τις πέντε θέσεις που έχει το παγκάκι. Αυτό γίνεται με Δ_2^5 τρόπους, διότι έχει σημασία π.χ. ποιο άτομο θα καθίσει στη θέση 1 και ποιο στη θέση 2, αν βέβαια τα άτομα καθίσουν στις θέσεις 1 και 2. Εδώ τώρα έχουμε $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \Delta_2^5 = 6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 240$ τρόπους.

Τέλος τα 2 τελευταία άτομα έχουν μοναδικό τρόπο επιλογής για το παγκάκι και Δ_2^5 τρόπους για τις θέσεις που θα καθίσουν.

Από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι έχουμε $75 \cdot 240 \cdot 20 = 360.000$ διαφορετικούς τρόπους.

Άλλος τρόπος

Σύμφωνα με το πρόβλημα, η κατανομή των ατόμων στα παγκάκια οδηγεί στη μορφή **<1, 2, 2>**. Επομένως είναι σαν να χωρίζουμε τα 5 άτομα σε 3 ομάδες, όπως φαίνεται στην κατανομή. Οι 3 ομάδες (τρία παγκάκια) διατάσσονται μεταξύ τους και αυτό γίνεται με $3!$ τρόπους.

Στο παγκάκι που έχουμε 1 άτομο, αυτό έχει 5 δυνατότητες επιλογής (όσες οι θέσεις που έχει το παγκάκι). Τέλος, σε κάθε παγκάκι που θα καθίσουν από 2 άτομα έχουμε Δ_2^5 τρόπους επιλογής για τις θέσεις ανά παγκάκι. Άρα έχουμε:

$$\frac{5!}{2! (2!)^2 1!} \cdot 3! \cdot 5 \cdot \Delta_2^5 \cdot \Delta_2^5 = 15 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 20 = 180.000 \text{ τρόπους.}$$

Παρατηρούμε ότι βρήκαμε δύο διαφορετικά αποτελέσματα και μάλιστα το ένα διπλάσιο από το άλλο. Το ένα είναι σίγουρα λάθος. Ποιο όμως είναι το λάθος;

Το λάθος είναι το πρώτο αποτέλεσμα αν και φαίνεται λογικότατο. Το λάθος συνίσταται στο ότι έχουμε δύο ομάδες ισοπληθείς και κάναμε διπλομετρήσεις χωρίς να το καταλάβουμε.

Έστω ότι έχουμε τα άτομα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ και τα παγκάκια π_1, π_2, π_3 . Στον χωρισμό των τριών ομάδων υπάρχουν ομάδες που το άτομο που κάθεται μόνο του είναι το α_1 . Έστω ότι το άτομο α_1 κάθεται στο παγκάκι π_1 . Αφού το άτομο α_1 κάθεται στο παγκάκι π_1 , μένουν τα άτομα $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ τα οποία θα χωριστούν σε 2 ομάδες των 2 ατόμων η καθεμία και από αυτές τις 2 ομάδες η μία θα καθίσει στο παγκάκι π_2 και η άλλη θα καθίσει στο παγκάκι π_3 .

Με τον 1^ο τρόπο θα επιλέγαμε από τα 4 άτομα τα 2 με $\binom{4}{2} = 6$ τρόπους και αυτά τα 2 άτομα θα επέλεγαν ένα από τα 2 παγκάκια π_2, π_3 με $\binom{2}{1} = 2$ τρόπους για να καθίσουν.

Άρα θα βρίσκαμε $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} = 6 \cdot 2 = 12$ διαφορετικούς τρόπους. Τα άλλα 2 άτομα υποχρεωτικά θα κάθονταν στο άλλο παγκάκι. Όμως οι τρόποι με τους οποίους τα άτομα $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ χωρίζονται σε 2 ομάδες των 2 ατόμων έκαστη και η μία ομάδα κάθεται στο ένα παγκάκι από τα π_2, π_3 και η άλλη στο άλλο παγκάκι δεν είναι 12 αλλά είναι οι μισοί, δηλαδή οι τρόποι είναι 6.

Εξήγηση γιατί οι τρόποι είναι 6 και όχι 12.

Ο χωρισμός σε ομάδες είναι:

- Στη μία ομάδα τα άτομα α_1, α_2 , οπότε στην άλλη υποχρεωτικά τα άτομα α_3, α_4 .
- Στη μία ομάδα τα άτομα α_1, α_3 , οπότε την άλλη ομάδα υποχρεωτικά τα άτομα α_2, α_4 .
- Στην μία ομάδα τα άτομα α_1, α_4 , άρα στην άλλη ομάδα υποχρεωτικά τα άτομα α_2, α_3 .

Σε καθεμία από τις **τρεις** παραπάνω περιπτώσεις, η μία ομάδα κάθεται στο ένα από τα δύο παγκάκια π_2, π_3 , οπότε η άλλη κάθεται υποχρεωτικά στο άλλο παγκάκι, οπότε έχουμε 2 επιλογές για το παγκάκι. Τελικό αποτέλεσμα $3 \cdot 2 = 6$.

Συμπέρασμα

Όταν έχουμε να χωρίσουμε άτομα σε ομάδες (ιδιαίτερα όταν υπάρχουν ισοπληθείς ομάδες) πρέπει:

(1^ο) Να χωρίσουμε τα άτομα σε μη διατεταγμένες ομάδες. Δηλαδή να εφαρμόσουμε το τυπολόγιο της διαμέρισης συνόλου.

(2^ο) Να ξεκαθαρίσουμε τι συμβαίνει μεταξύ των ομάδων.

- Αν καμία ομάδα δεν μετατίθεται με άλλη ομάδα, έχουμε τον τύπο της διαμέρισης.
- Αν όλες οι ομάδες μετατίθενται μεταξύ τους, τότε τον τύπο της διαμέρισης τον πολλαπλασιάζουμε με το παραγοντικό του πλήθους των ομάδων.
- Αν έχουμε ρ ομάδες και ρ_1 απ' αυτές μετατίθενται μεταξύ τους, όχι όμως με άλλες ομάδες, ρ_2 απ' αυτές μετατίθενται μεταξύ τους, όχι όμως με άλλες ομάδες, ..., ρ_k απ' αυτές μετατίθενται μεταξύ τους, όχι όμως με άλλες ομάδες, με:

$$\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k = \rho,$$

τότε τον τύπο της διαμέρισης τον πολλαπλασιάζουμε με $\rho_1! \cdot \rho_2! \cdot \dots \cdot \rho_k!$.

(3°) Τέλος, ελέγχουμε τι συμβαίνει με τα άτομα της κάθε ομάδας, δηλαδή ελέγχουμε αν υπάρχει κάποια διάταξη των ατόμων ή όχι εντός της κάθε ομάδας.

Στο πρόβλημά μας έχουμε 5 άτομα χωρισμένα σε 3 ομάδες με την κατανομή της μορφής **<1, 2, 2>**. Άρα στο πρώτο βήμα έχουμε

$$\frac{5!}{(2!)^2 2! \cdot 1!} = \frac{5!}{8} = 15 \text{ τρόπους.}$$

Στο 2° βήμα έχουμε πλήρη μετάθεση των 3 ομάδων (αριθμημένα τα παγκάκια). Άρα πολλαπλασιάζουμε το 15 επί 3!.

Στο 3° βήμα ελέγχουμε τι συμβαίνει στην κάθε ομάδα, δηλαδή στο κάθε παγκάκι. Στο παγκάκι που θα καθίσει το 1° άτομο έχουμε Δ_1^5 ή $\binom{5}{1}$ τρόπους για να καθίσει. Σε καθένα από τα παγκάκια που θα καθίσουν από 2 άτομα έχουμε Δ_2^5 τρόπους. Τελικά έχουμε:

$$\frac{5!}{2! \cdot (2!)^2 \cdot 1!} \cdot 3! \cdot \Delta_1^5 \cdot \Delta_2^5 \cdot \Delta_2^5 = 180.000 \text{ τρόπους.}$$

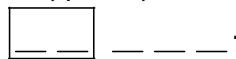
(β) Η μία ομάδα που θα σχηματιστεί είναι ήδη γνωστή: Δημήτρης – Σοφία. Υπάρχει ένας τρόπος σχηματισμού. Μένουν άλλα 3 άτομα να σχηματίσουν 2 ομάδες με κατανομή <2, 1>. Οι τρόποι εδώ είναι

$$\frac{3!}{2! 1!} = 3.$$

Άρα ο χωρισμός των ατόμων σε 3 ομάδες, χωρίς άλλον περιορισμό, γίνεται με $1 \cdot 3 = 3$ διαφορετικούς τρόπους.

Οι 3 ομάδες μετατίθενται πλήρως. Άρα έχουμε 3! τρόπους.

Το άτομο που κάθεται μόνο του έχει Δ_1^5 επιλογές. Ο Δημήτρης με τη Σοφία, επειδή κάθονται δίπλα – δίπλα, στην αρχή μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως ένα άτομο το οποίο καταλαμβάνει δύο θέσεις. Άρα είναι σαν να έχουμε 1 άτομο, το οποίο καταλαμβάνει μία από τις 4 θέσεις



Οι τρόποι κατάληψης είναι $\binom{4}{1} = 4$. Όμως ο Δημήτρης με τη Σοφία μετατίθενται μεταξύ τους. Άρα

έχουμε $4 \cdot 2 = 8$ διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης.

Τέλος τα άλλα 2 άτομα τοποθετούνται στο παγκάκι κατά Δ_2^5 τρόπους.

Άρα οι τρόποι στους οποίους ο Δημήτρης με τη Σοφία κάθονται δίπλα-δίπλα, είναι συνολικά $3 \cdot 3! \cdot \binom{5}{1} \cdot (4 \cdot 2) \cdot \Delta_2^5 = 3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 = 14.400$. Επομένως η πιθανότητα που ζητάμε είναι ίση με

$$\frac{14.400}{180.000} = 0,08 = 8\%.$$

Επίλογος

Κλείνουμε το Κεφάλαιο 4 με την εύρεση του πλήθους των τρόπων με τους οποίους μπορούν να χωριστούν n άτομα σε p ομάδες έτσι, ώστε:

ρ_1 ομάδες να έχουν από v_1 άτομα η καθεμία

ρ_2 ομάδες να έχουν από v_2 άτομα η καθεμία

.....

ρ_k ομάδες να έχουν από v_k άτομα η καθεμία

με $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k = p$, $\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \dots + \rho_k v_k = n$ και $v_i \neq v_j$, για κάθε $i \neq j$.

- (1) Γνωρίζουμε ότι όταν δεν έχουμε καμία διάταξη μεταξύ των ομάδων και επίσης καμία διάταξη μεταξύ των ατόμων οποιασδήποτε ομάδας, οι τρόποι σε πλήθος είναι:

$$\frac{n!}{\rho_1! (v_1!)^{\rho_1} \cdot \rho_2! (v_2!)^{\rho_2} \cdot \dots \cdot \rho_k! (v_k!)^{\rho_k}} \quad (1)$$

Ο τύπος αυτός είναι ο βασικός τύπος που χρησιμοποιείται για όλες τις άλλες περιπτώσεις.

- (2) Όταν έχουμε μετάθεση των p ομάδων, αλλά καμία διάταξη μεταξύ των ατόμων οποιασδήποτε ομάδας, τότε ο τύπος (1) πολλαπλασιάζεται με το πλήθος των μεταθέσεων των p ομάδων, δηλαδή με το $p!$. Άρα έχουμε:

$$\frac{n!}{\rho_1! (v_1!)^{\rho_1} \cdot \rho_2! (v_2!)^{\rho_2} \cdot \dots \cdot \rho_k! (v_k!)^{\rho_k}} \cdot p! \quad (2)$$

- (3) Όταν έχουμε μετάθεση των ατόμων σε κάθε μία από τις p ομάδες και καμία διάταξη μεταξύ των ομάδων, τότε ο τύπος (1) πολλαπλασιάζεται επί:

$$(v_1!)^{\rho_1} \cdot (v_2!)^{\rho_2} \cdot \dots \cdot (v_k!)^{\rho_k},$$

διότι τόσο είναι το πλήθος όλων των μεταθέσεων, οπότε ο τύπος γίνεται:

$$\frac{n!}{\rho_1! \cdot \rho_2! \cdot \rho_3! \cdot \dots \cdot \rho_k!} \quad (3)$$

- (4) Όταν έχουμε μετάθεση των ομάδων και μετάθεση των ατόμων σε κάθε μία ομάδα, τότε ο τύπος (1) πολλαπλασιάζεται με $(v_1!)^{\rho_1} \cdot (v_2!)^{\rho_2} \cdot \dots \cdot (v_k!)^{\rho_k} \cdot p!$, οπότε γίνεται:

$$\frac{n!}{\rho_1! \cdot \rho_2! \cdot \rho_3! \cdot \dots \cdot \rho_k!} \cdot p!$$

- (5) Όταν έχουμε κάποιο είδος διάταξης στις ομάδες και κάποιο είδος διάταξης στα άτομα κάποιας ή κάποιων ομάδων, τότε τον τύπο (1) τον πολλαπλασιάζουμε με τον κατάλληλο αριθμό. Για

παράδειγμα όταν τα αντικείμενα των ομάδων ρ_1 και ρ_2 και μόνο αυτά μπορούν να μετατεθούν (να μπουν σε μία σειρά) και στις ομάδες δεν έχουμε καμία διάταξη, θα έχουμε έλλειψη στον παρονομαστή του τύπου (1) των παραγόντων

$$(v_1!)^{\rho_1} \cdot (v_2!)^{\rho_2}.$$

(6) Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που οι ομάδες που περιέχουν τον ίδιο αριθμό ατόμων μετατίθενται μεταξύ τους, αλλά δεν μετατίθενται ομάδες που περιλαμβάνουν διαφορετικό αριθμό ατόμων. Δηλαδή μετατίθενται οι ομάδες ρ_1 διότι η κάθε μία από αυτές έχει από v_1 άτομα. Από την μετάθεση των ρ_1 ομάδων θα πάρουμε $\rho_1!$ διαφορετικούς τρόπους. Μετατίθενται οι ομάδες ρ_2 , διότι η κάθε μία από αυτές έχει από v_2 άτομα. Από την μετάθεση των ρ_2 ομάδων θα πάρουμε $\rho_2!$ διαφορετικούς τρόπους. Συνεχίζουμε μέχρι να μετατεθούν και οι ρ_κ ομάδες. Άρα πολλαπλασιάζουμε τον τύπο (1) με $\rho_1! \rho_2! \rho_3! \dots \rho_\kappa!$ και έχουμε:

$\frac{v!}{(v_1!)^{\rho_1} \cdot (v_2!)^{\rho_2} \cdot \dots \cdot (v_\kappa!)^{\rho_\kappa}}$	(6)
--	------------

Με τι πολλαπλασιάζουμε κάθε φορά τον τύπο (1) εξαρτάται από τα δεδομένα. Ξαναδές αν θες το προηγούμενο παράδειγμα και οπωσδήποτε πρόσεξε τι είδος διάταξης έχουμε στα άτομα της κάθε ομάδας (δηλαδή πώς κάθονται τα άτομα στο κάθε παγκάκι).

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 6

Προσθήκη 7

14-11-2025

Συνδυασμοί με επανάληψη

Αναλυτική και μεθοδική παρουσίαση

Από τέσσερις γεύσεις παγωτού παίρνουμε σε κυπελάκι 3 μπάλες. Μπορούμε να πάρουμε τις μπάλες από όποια γεύση θέλουμε, από καμία μπάλα έως τρεις μπάλες από την κάθε γεύση. Κάθε επιλογή είναι ένας **συνδυασμός με επανάληψη**, διότι:

(α) δεν μας ενδιαφέρει η σειρά που πήραμε τις μπάλες και επιπλέον

(β) μπορούμε να πάρουμε μέχρι 3 μπάλες από την κάθε γεύση, έχουμε δηλαδή επανάληψη των γεύσεων, με άλλα λόγια επανάληψη των στοιχείων του αρχικού συνόλου που έχει ως στοιχεία τις γεύσεις.

Το γεγονός ότι εμείς βάζουμε στο διάγραμμα που βλέπετε τις γεύσεις σε σειρά Α-Β-Γ-Δ, το κάνουμε μόνο για την παρουσίαση της λύσης. Καμία διάταξη δεν είναι απαραίτητη, ούτε λαμβάνεται κάπου υπόψη. Είναι απαραίτητη μόνο για την κωδικοποίηση.

Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε παγωτό !

Λύση



Ας κάνουμε μερικά σχόλια

(α) Αφού οι γεύσεις είναι 4 χρησιμοποιούμε 3 βελάκια (→) που δείχνουν το : Πάρε-Φύγε !

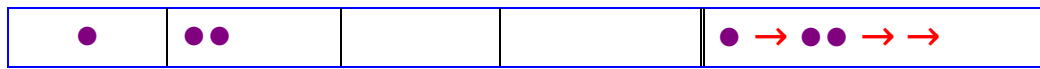
(β) Όταν περνάμε από το κάθε δοχείο με τις γεύσεις, βάζουμε πριν το βελάκι τόσα κυκλάκια (●), όσες οι μπάλες που παίρνουμε από αυτή τη γεύση.

Κάθε μας επιλογή θα την περιγράψουμε μόνο με τη βοήθεια αυτών των δύο συμβόλων και έτσι θα βρούμε το πλήθος των τρόπων που έχουμε για να πάρουμε παγωτό.

Γεύση Α	Γεύση Β	Γεύση Γ	Γεύση Δ	Κωδικοποίηση
●	●●			● → ● ● → →
	●	●	●	→ ● → ● → ●
●		●	●	● → → ● → ●
●		●●		● → → ● ● →
	●		●●	→ ● → → ●●
			●●●	→ → → ● ● ●

Παραδείγματα

(α) Ας πάρουμε την πρώτη γραμμή του παραπάνω πίνακα :



Τα τέσσερα πρώτα κουτιά δίνουν τις εξής εντολές !

- Πάρε μια μπάλα από την πρώτη γεύση και βάλε βελάκι.
- Πάρε μια μπάλα από τη δεύτερη γεύση και βάλε βελάκι.
- Μην πάρεις τίποτα από την γεύση Γ και φύγε βάζοντας βελάκι.
- Μην παίρνεις τίποτα από τη γεύση Δ, τελείωσες, δεν χρειάζεται να πας παρά στο ταμείο !

Νε αυτόν τον τρόπο η παραπάνω επιλογή δίνει τον κώδικα που βλέπουμε στην τελευταία στήλη αυτού του μικρού πίνακα.

Αντιστρόφως :

Ο σχηματισμός (κωδικοποίηση) ● → ●● → → στο τελευταίο κουτί δηλώνει :

- Πάρε μια μπάλα από τη γεύση Α και προχώρα (● →).
Με το πρώτο βελάκι τελείωσε η πρώτη γεύση. Πήρες μία μπάλα, τέλος !
- Πάρε δύο μπάλες από τη γεύση Β και προχώρα (●● →).
Με το δεύτερο βελάκι τελείωσε και η δεύτερη γεύση.
- Έχεις πάρει ήδη 3 μπάλες, δεν μπορείς να πάρεις από την γεύση Γ (όχι άλλο κυκλάκι), προχώρα (→)!
- Έχεις φτάσει στη γεύση Δ, δεν δικαιούσαι τίποτα, πας ταμείο !!!

Το πρώτο βελάκι δηλώνει ότι τελείωσες με τη γεύση Α, το δεύτερο ότι τελείωσες με τη γεύση Β, το τρίτο ότι τελείωσες με τη γεύση Γ. Δεν χρειάζεται άλλο πια βελάκι, γιατί έφτασες στη γεύση Δ και αν μεν πάρεις μπάλες, θα βάλεις τα αντίστοιχα κυκλάκια, αλλιώς δεν βάζεις τίποτα!

Αυτός είναι ο λόγος που τα βελάκια είναι πάντα ένα λιγότερα από τις γεύσεις.

(β) Ας πάρουμε τη δεύτερη γραμμή του πίνακα.



Ο σχηματισμός (κωδικοποίηση) ● → → ● → ● στο τελευταίο κουτί δηλώνει :

- Πάρε μια μπάλα από τη γεύση Α και προχώρα (● →).
Με το πρώτο βελάκι τελείωσε η πρώτη γεύση. Πήρες μία μπάλα, τέλος !
- Μην παίρνεις από τη γεύση Β, προχώρα (→)
Με το δεύτερο βελάκι τελείωσε και η δεύτερη γεύση. Δεν πήραμε τίποτα.

- Πάρε μια μπάλα από τη γεύση Γ και προχώρα (→)
- Έχεις φτάσει στη γεύση Δ, δεν δικαιούσαι τίποτα, πας ταμείο !!!

Έτσι κάθε επιλογή δίνει έναν σχηματισμό και κάθε σχηματισμός οδηγεί σε μια μοναδική επιλογή γεύσεων.

Για παράδειγμα, η επιλογή



οδηγεί στο σχηματισμό (→ → → ● ● ●) που δηλώνει ότι και τις 3 μπάλες τις πήραμε από τη γεύση Δ.

Αριστερά από το πρώτο βελάκι δεν βλέπουμε μπάλες, επομένως δεν πήραμε μπάλα από την πρώτη γεύση. Το ίδιο και με το δεύτερο και το τρίτο βελάκι. Φτάσαμε επομένως στην γεύση Δ και από αυτή πήραμε 3 μπάλες.

Αλλά οι σχηματισμοί αποτελούνται από δύο είδη συμβόλων. Το ένα, τα βελάκια παρουσιάζονται 3 φορές. Τόσες παρουσιάζονται και οι μπάλες.

Αλλά αυτά τα $3+3=6$ αντικείμενα μπαίνουν σε μία σειρά με

$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20 \text{ τρόπους.}$$

Μπορούμε επομένως να πάρουμε 3 μπάλες παγωτό από ένα κατάστημα που διαθέτει 4 γεύσεις με 20 τρόπους.

Παρατήρηση

Στο πρόβλημα αυτό έχουμε συνδυασμούς με επανάληψη 4 στοιχείων ανά 3.

Ο αριθμός 4 δείχνει το πλήθος των στοιχείων (γεύσεων) του συνόλου Α που θα σχηματίσουν τον συνδυασμό και ο αριθμός 3 δείχνει μέχρι πόσες το πολύ φορές μπορεί να επαναληφθεί το κάθε στοιχείο του συνόλου (των γεύσεων) ή με άλλα λόγια πόσα στοιχεία έχει ο συνδυασμός (πόσες μπάλες έχει το κάθε παγωτό).

Είδαμε επίσης ότι το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να πάρουμε ένα παγωτό με 3 μπάλες είναι όσοι οι συνδυασμοί με επανάληψη των 4 ανά 3 και το πλήθος αυτό είναι :

$$\binom{4+3-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$$

Άλλο παράδειγμα

Αν ρίξουμε ένα ζάρι 3 φορές και θέλουμε να καταγράψουμε τα δυνατά αποτελέσματα, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά εμφάνισης των ενδείξεων, τότε :

(α) Το ζάρι μπορεί να φέρει 6 διαφορετικά αποτελέσματα

(β) Το ζάρι το ρίξαμε 3 φορές και έτσι ο κάθε συνδυασμός (το αποτέλεσμα του πειράματος) έχει 3 άτομα(στοιχεία).

Πρόκειται λοιπόν για τους συνδυασμούς με επανάληψη 6 στοιχείων ανά 3 και το πλήθος τους είναι :

$$\binom{6+3-1}{6-1} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Γενικά αν έχουμε ένα σύνολο με n στοιχεία και θέλουμε συνδυασμούς με επανάληψη ανά k , τότε το πλήθος τους θα είναι :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Ας προσέξουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του κάθε συνδυασμού, το k δηλαδή, μπαίνει στο κάτω μέρος του συνδυασμού. Στο πάνω μέρος είναι πάντα το $n+k-1$, το οποίο είναι συμμετρική παράσταση των n , k και έτσι πάντα θα είναι σωστό. Το κάτω μέρος όμως θέλει προσοχή !

Ένας τρόπος με τον οποίο αποφεύγουμε περίπτωση λάθους είναι να βάλουμε στο κάτω μέρος το πλήθος από τις μπάρες που βάλαμε και οι οποίες πάντα είναι $n-1$.

Σχόλιο

Μια συχνά χρήσιμη τακτική για να κατανοούμε ένα πρόβλημα συνδυαστικής είναι να εξετάζουμε ποιο είναι το πείραμα και τι αποτελέσματα έχει, εννοώντας ποια μορφή έχουν τα αποτελέσματα του πειράματος. Στην ουσία πρόκειται τελικά για την απαρίθμηση των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω του πειράματος.

Παράδειγμα

Τρία άτομα αποβιβάζονται από το ασανσέρ σε ένα κτίριο με 4 ορόφους. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι αποβίβασης υπάρχουν, αν μπήκαν στο ισόγειο ;

Απάντηση

Το πείραμα είναι η αποβίβαση 3 ατόμων. Επομένως κάθε ενδεχόμενο θα είναι μια διατεταγμένη τριάδα, μια και μας ενδιαφέρει ο όροφος που θα κατέβει το κάθε άτομο. Έτσι τα απλά ενδεχόμενα έχουν τη μορφή (α, β, γ) . Καθεμιά από τις συνιστώσες α , β , γ έχει 4 δυνατότητες. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε τελικά $4^3 = 64$ τρόπους αποβίβασης.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 7

Προσθήκη 8

2-12-2025

Αναλυτική παρουσίαση της

Αρχής Εγκλεισμού – Αποκλεισμού (Α.Ε-Α)

Με πόσους τρόπους μπορούμε να δώσουμε 5 διαφορετικά βιβλία σε 3 παιδιά, αν κάθε παιδί πρέπει να πάρει βιβλίο;

Λύση

Η μέθοδος της **Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού (Α.Ε.Α.)** μπορεί να ερμηνευθεί όπως παρακάτω με την έννοια των "Καλών" και "Κακών" περιπτώσεων. Ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Ορισμός Καλών και Κακών Περιπτώσεων

- ☐ **Καθολικό Σύνολο (U):** Περιέχει όλες τις δυνατές περιπτώσεις (όλες τις διανομές) .
- ☐ **Καλή Περίπτωση :** Κάθε παιδί παίρνει τουλάχιστον ένα βιβλίο.
- ☐ **Κακή Περίπτωση:** Υπάρχει τουλάχιστον ένα παιδί που **δεν** παίρνει βιβλίο.

Ο στόχος μας είναι να βρούμε τον αριθμό του συνόλου << Καλοί Τρόποι >>, όπου :

$$\text{Καλοί Τρόποι} = \text{Καθολικό Σύνολο} - \text{Κακοί Τρόποι}$$

2. Υπολογισμός του Καθολικού Συνόλου (U)

Ερώτηση: Πόσοι είναι όλοι οι τρόποι διανομής 5 διαφορετικών βιβλίων σε 3 παιδιά **χωρίς κανέναν περιορισμό**;

- Για το **1ο βιβλίο**, υπάρχουν 3 επιλογές (Παιδί 1, Παιδί 2, ή Παιδί 3).
- Για το **2ο βιβλίο**, υπάρχουν πάλι 3 επιλογές.

.....

και ούτω καθεξής για τα 5 βιβλία. Επομένως θα είναι :

$$|U| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

3. Υπολογισμός των Κακών Περιπτώσεων

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Εγκλεισμού - Αποκλεισμού

Οι κακές περιπτώσεις είναι εκείνες όπου **τουλάχιστον ένα** παιδί δεν παίρνει βιβλίο.

Ορίζουμε τις ιδιότητες (τις "κακές" συνθήκες): A_1, A_2, A_3 :

- A_1 : Το σύνολο των διανομών όπου το **παιδί 1** δεν παίρνει βιβλίο.
- A_2 : Το σύνολο των διανομών όπου το **παιδί 2** δεν παίρνει βιβλίο.
- A_3 : Το σύνολο των διανομών όπου το **παιδί 3** δεν παίρνει βιβλίο.

Το σύνολο των κακών περιπτώσεων είναι η ένωση: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

A. Εγκλεισμός (Πρόσθεση των Κακών Περιπτώσεων με Μέγεθος 1)

Υπολογίζουμε τους τρόπους όπου ακριβώς **ένα** συγκεκριμένο παιδί μένει εκτός.

- $|A_1|$: Το παιδί 1 μένει εκτός.

Τα 5 βιβλία μοιράζονται στα $3-1=2$ παιδιά (Παιδί 2, Παιδί 3). Είναι: $|A_1| = 2^5 = 32$

- Ομοίως είναι: $|A_2| = 2^5 = 32$ και $|A_3| = 2^5 = 32$.

Σύνολο Μοναχικών Κακών Περιπτώσεων:

$$\sum |A_i| = \binom{3}{1} \cdot 2^5 = 3 \cdot 32 = 96$$

B. Αποκλεισμός (Αφαίρεση των Τομών με Μέγεθος 2)

Με την παραπάνω πρόσθεση, μετρήσαμε διπλά τις περιπτώσεις όπου **δύο** παιδιά έμειναν εκτός (π.χ. οι περιπτώσεις του $A_1 \cap A_2$ μετρήθηκε και στο $|A_1|$ και στο $|A_2|$). Πρέπει να τις αφαιρέσουμε.

- $|A_1 \cap A_2|$: Τα Παιδιά 1 και 2 μένουν εκτός.

Τα 5 βιβλία μοιράζονται επομένως στο $3-2=1$ παιδί (Παιδί 3). Εδώ είναι :

$$|A_1 \cap A_2| = 1^5 = 1. \text{ Ομοίως:}$$

$$|A_1 \cap A_3| = 1^5 = 1 \text{ και } |A_2 \cap A_3| = 1^5 = 1.$$

Σύνολο Διπλών Τομών (που αφαιρούνται):

$$\sum |A_i \cap A_j| = \binom{3}{2} \cdot 1^5 = 3 \cdot 1 = 3$$

Γ. Εγκλεισμός (Πρόσθεση των Τομών με Μέγεθος 3)

Με τα δύο παραπάνω βήματα, η περίπτωση όπου και τα **τρία** παιδιά έμειναν εκτός $(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ μετρήθηκε 3 φορές (στο **A.**) και αφαιρέθηκε 3 φορές (στο **B.**), οπότε **δεν έχει μετρηθεί καθόλου**. Πρέπει να προστεθεί ξανά.

- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$: Τα παιδιά 1, 2 και 3 μένουν εκτός. Τα 5 βιβλία μοιράζονται σε $3-3=0$ παιδιά.

Επομένως εδώ έχουμε $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0^5 = 0$

Σύνολο Τριπλών Τομών (που προστίθενται):

$$\sum |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{3}{3} \cdot 0^5 = 1 \cdot 0 = 0.$$

4. Τελική Εύρεση των Καλών Περιπτώσεων

Ο συνολικός αριθμός των **Κακών Περιπτώσεων** είναι:

$$\text{Κακοί Τρόποι: } \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

Το πλήθος επομένως των κακών τρόπων είναι: $96 - 3 + 0 = 93$

Ο αριθμός των **Καλών Περιπτώσεων** (όπου κάθε παιδί παίρνει βιβλίο) είναι συνεπώς:

Καλοί Τρόποι:

Πλήθος στοιχείων Καθολικού Συνόλου – Πλήθος κακών τρόπων = $243 - 93 = 150$.

Μπορούμε λοιπόν να δώσουμε τα 5 βιβλία στα 3 παιδιά με 150 τρόπους και έτσι ώστε κανένα παιδί να μην μείνει χωρίς βιβλίο.

Αυτή η προσέγγιση είναι μια αναλυτική παρουσίαση της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού.

Σχόλιο

Η πιο απλή λύση αυτού του προβλήματος είναι με τη βοήθεια των κατανομών (διαμερίσεων) του αριθμού 5, την οποία έχουμε αναλύσει διεξοδικά στο βιβλίο. Περιγράφουμε κάπως σύντομα τη λύση :

1° Βήμα

Γράφουμε :

$$5 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση, αφού κάθε παιδί θα πάρει ένα τουλάχιστον βιβλίο.

2° Βήμα

Παίρνουμε την κατανομή $5 = 3 + 1 + 1$

Υπάρχουν $\frac{5!}{3!1!1!2!} = \frac{120}{12} = 10$ τρόποι χωρισμού των 5 τετραδίων σε μη διατεταγμένες ομάδες

των 3, 1, 1 και αυτές δίνονται στα 3 παιδιά με $3! \cdot 10 = 60$ τρόπους.

3° Βήμα

Παίρνουμε την κατανομή $5 = 2 + 2 + 1$

Υπάρχουν $\frac{5!}{2!2!2!1!} = \frac{120}{8} = 15$ τρόποι χωρισμού των 5 τετραδίων σε μη διατεταγμένες ομάδες

των 2, 2, 1 τετραδίων και αυτές δίνονται στα 3 παιδιά με $3! \cdot 15 = 90$ τρόπους.

Επομένως, από την προσθετική αρχή συμπεραίνουμε ότι τα τετράδια μπορούν να δοθούν στα 3 παιδιά, με τον περιορισμό κανένα παιδί να μη μείνει χωρίς βιβλίο, με $60 + 90 = 150$ τρόπους.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 8

Προσθήκη 9**5-12-2025****Βασικές εφαρμογές των Συνδυασμών****Χωρισμός σε ομάδες – κατανομή ομάδων****Άσκηση 1: Κατανομή βιβλίων σε κουτιά**

Μπορούμε να βάλουμε σε 3 διαφορετικά κουτιά 10 διαφορετικά βιβλία, αν το ένα κουτί χωράει 4 βιβλία και τα άλλα δύο από 3 βιβλία το καθένα. Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν όλα τα κουτιά γεμίσουν.

Λύσεις**1η Λύση – Με διαδοχικές επιλογές**

Θέλουμε να μοιράσουμε 10 διαφορετικά βιβλία σε 3 διαφορετικά κουτιά, με χωρητικότητες:

- 1ο κουτί: 4 βιβλία
- 2ο κουτί: 3 βιβλία
- 3ο κουτί: 3 βιβλία

και συνολικά τα κουτιά γεμίζουν ακριβώς ($4 + 3 + 3 = 10$).

(1) Διαλέγουμε ποια 4 βιβλία θα μπουν στο 1ο κουτί.

Από τα 10 διαφορετικά βιβλία διαλέγουμε 4 για το πρώτο κουτί:

$$\binom{10}{4}.$$

(2) Διαλέγουμε ποια 3 από τα υπόλοιπα 6 βιβλία θα μπουν στο 2ο κουτί.

Μένουν 6 βιβλία. Από αυτά διαλέγουμε 3 για το δεύτερο κουτί με

$$\binom{6}{3} \text{ τρόπους.}$$

(3) Τα υπόλοιπα 3 βιβλία πάνε αυτόματα στο 3ο κουτί.

Μένουν 3 βιβλία και το τρίτο κουτί χωρά ακριβώς 3, οπότε έχουμε :

$$\binom{3}{3} = 1 \text{ τρόπο.}$$

(4) Εφαρμόζουμε την πολλαπλασιαστική αρχή: $N = \binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3}$.

Υπολογίζουμε:

$$\binom{10}{4} = 210, \quad \binom{6}{3} = 20, \quad \binom{3}{3} = 1.$$

Άρα $N = 210 \cdot 20 \cdot 1 = 4200$.

Συνεπώς, υπάρχουν **4200 τρόποι** να μοιράσουμε τα βιβλία στα κουτιά έτσι ώστε να γεμίσουν όλα.

2η Λύση – Με πολυωνυμικό συντελεστή

Θα θεωρήσουμε ότι χωρίζουμε απευθείας τα 10 διαφορετικά βιβλία σε 3 ομάδες, όπου κάθε ομάδα αντιστοιχεί σε ένα κουτί.

Θέλουμε:

- 4 βιβλία να πάνε στο 1ο κουτί,
- 3 βιβλία να πάνε στο 2ο κουτί,
- 3 βιβλία να πάνε στο 3ο κουτί.

Ο αριθμός των τρόπων να μοιράσουμε τα 10 διαφορετικά βιβλία σε 3 συγκεκριμένες ομάδες με πληθάρια 4,3,3 αντίστοιχα δίνεται με βάση θεωρία από τις κατανομές σε καλιά από τον πολυωνυμικό συντελεστή:

$$N = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Αυτός ο πολυωνυμικός συντελεστής ισοδυναμεί με τη διαδικασία:

- πρώτα διαλέγουμε 4 βιβλία για το 1ο κουτί,
- μετά 3 από τα υπόλοιπα 6 για το 2ο,
- και τα 3 τελευταία πηγαίνουν στο 3ο κουτί.

Υπολογίζοντας, έχουμε $N = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200$.

Άρα ξανά, υπάρχουν 4200 τρόποι.

3η Λύση – Πρώτα μη διατεταγμένες ομάδες, μετά στα κουτιά

Εδώ θα δουλέψουμε σε δύο στάδια:

(a) Πρώτα θα χωρίσουμε τα 10 βιβλία σε μη διατεταγμένες ομάδες με μεγέθη 4,3,3

(b) Έπειτα θα τοποθετήσουμε αυτές τις ομάδες στα 3 διαφορετικά κουτιά.

Βήμα (a): Διασπάσεις σε μη διατεταγμένες ομάδες 4,3,3. Αν πρώτα θεωρούσαμε ότι οι ομάδες είναι διατεταγμένες (1η ομάδα, 2η ομάδα, 3η ομάδα), ο αριθμός των τρόπων να χωρίσουμε τα 10 διαφορετικά βιβλία σε ομάδες με μεγέθη 4,3,3 θα ήταν:

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

Όμως εδώ οι ομάδες θεωρούνται μη διατεταγμένες: μας νοιάζει μόνο το ποια υποσύνολα με μέγεθος 4 και 3,3 προκύπτουν, όχι η σειρά με την οποία τα γράφουμε.

Επειδή υπάρχουν δύο ομάδες με το ίδιο μέγεθος (οι δύο ομάδες των 3 βιβλίων), κάθε διάσπαση μετρίεται δύο φορές, ανάλογα με το ποια από τις δύο ομάδες των 3 θα ονομάσουμε «2η» και ποια «3η». Για να διορθώσουμε αυτή την υπερμέτρηση, διαιρούμε με 2!. Άρα ο αριθμός των μη διατεταγμένων διασπάσεων είναι:

$$D = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!}.$$

Βήμα (b): Τοποθέτηση των ομάδων στα 3 διαφορετικά κουτιά

Για κάθε τέτοια διάσπαση, έχουμε:

- μία συγκεκριμένη ομάδα 4 βιβλίων,
- και δύο συγκεκριμένες ομάδες 3 βιβλίων.

Τώρα τα 3 κουτιά είναι διαφορετικά (κουτί 1,2,3) και θέλουμε να αντιστοιχίσουμε τις 3 ομάδες στα 3 κουτιά.

(1) Πρώτα επιλέγουμε σε ποιο κουτί θα πάει η ομάδα των 4 βιβλίων: αυτό μπορεί να γίνει με 1 τρόπο.

(2) Στα δύο υπόλοιπα κουτιά θα μπουν οι δύο ομάδες των 3 βιβλίων. Αυτές οι δύο ομάδες μπορούν να τοποθετηθούν στα δύο κουτιά με 2! τρόπους.

Άρα, για κάθε διάσπαση, ο αριθμός των τρόπων τοποθέτησης στα κουτιά είναι:

$$2! = 2.$$

Συνδυάζοντας τα δύο βήματα:

$$N = D \cdot 2 = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot 2.$$

Επομένως, ξαναβρίσκουμε ότι: $N = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3!} = 4200.$

Και με αυτή τη μέθοδο καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Άσκηση 2: 20 άτομα και 7 ταξί

Δίνουμε στη συνέχεια ένα τελείως παρόμοιο πρόβλημα για εξάσκηση των μαθητών μας.

Με πόσους τρόπους μπορούν να κατανεμηθούν 20 διαφορετικά άτομα σε 7 διαφορετικά ταξί, όπου 5 ταξί έχουν χωρητικότητα 2 ατόμων και 2 ταξί έχουν χωρητικότητα 5 ατόμων; Υποθέτουμε ότι όλα τα ταξί γεμίζουν ακριβώς και ότι δεν μας ενδιαφέρει η εσωτερική διάταξη των ατόμων μέσα στο κάθε ταξί, αλλά μόνο σε ποιο ταξί μπαίνει το κάθε άτομο.

Λύση 1 (Διαδοχική επιλογή με συνδυασμούς)

Θεωρούμε ότι τα 20 άτομα είναι διαφορετικά μεταξύ τους και ότι τα 7 ταξί είναι επίσης διαφορετικά. Τα 5 πρώτα ταξί έχουν χωρητικότητα 2 ατόμων και τα 2 τελευταία ταξί έχουν χωρητικότητα 5 ατόμων.

Γεμίζουμε τα ταξί διαδοχικά, χρησιμοποιώντας συνδυασμούς.

Βήμα 1: Επιλέγουμε ποια 2 από τα 20 άτομα θα μπουν στο πρώτο ταξί χωρητικότητας 2 ατόμων. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{20}{2}$ τρόπους.

Βήμα 2: Απομένουν 18 άτομα. Επιλέγουμε ποια 2 θα μπουν στο δεύτερο ταξί χωρητικότητας 2 ατόμων. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{18}{2}$ τρόπους.

Βήμα 3: Απομένουν 16 άτομα. Επιλέγουμε ποια 2 θα μπουν στο τρίτο ταξί χωρητικότητας 2 ατόμων. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{16}{2}$ τρόπους.

Βήμα 4: Απομένουν 14 άτομα. Επιλέγουμε ποια 2 θα μπουν στο τέταρτο ταξί χωρητικότητας 2 ατόμων. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{14}{2}$ τρόπους.

Βήμα 5: Απομένουν 12 άτομα. Επιλέγουμε ποια 2 θα μπουν στο πέμπτο ταξί χωρητικότητας 2 ατόμων. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{12}{2}$ τρόπους.

Μας μένουν τώρα 10 άτομα, τα οποία θα κατανεμηθούν στα 2 ταξί χωρητικότητας 5 ατόμων.

Βήμα 6: Επιλέγουμε ποια 5 από τα 10 άτομα θα μπουν στο πρώτο ταξί χωρητικότητας 5 ατόμων. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{10}{5}$ τρόπους.

Βήμα 7: Τα υπόλοιπα 5 άτομα θα μπου αναγκαστικά στο τελευταίο ταξί χωρητικότητας 5 ατόμων, άρα αυτό γίνεται με $\binom{5}{5} = 1$ τρόπο.

Επομένως, ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι το γινόμενο όλων των παραπάνω συνδυασμών:

$$T = \binom{20}{2} \cdot \binom{18}{2} \cdot \binom{16}{2} \cdot \binom{14}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}.$$

Αν απλοποιήσουμε αυτό το γινόμενο, προκύπτει ότι:

$$T = \frac{20!}{2!^5 \cdot 5!^2}.$$

Λύση 2 (Χωρισμός σε ομάδες και αντιστοίχιση στα ταξί)

Σε αυτή τη λύση θα σκεφτούμε πρώτα ότι χωρίζουμε τα 20 άτομα σε ομάδες μεγέθους 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5 (σύμφωνα με τις χωρητικότητες των ταξί) και στη συνέχεια θα αντιστοιχίσουμε αυτές τις ομάδες στα ταξί.

Φάση Α: Χωρισμός των 20 ατόμων σε ομάδες 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5.

Αν θεωρήσουμε ότι οι ομάδες είναι διατεταγμένες (δηλαδή ξεχωρίζουμε ρητά πρώτη, δεύτερη, τρίτη κτλ. ομάδα), τότε ο αριθμός των τρόπων να χωρίσουμε τα 20 άτομα σε ομάδες με μεγέθη 2, 2, 2, 2, 2, 5, 5 είναι:

$$\frac{20!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 5! \cdot 5!} = \frac{20!}{2!^5 \cdot 5!^2}.$$

Το 20! μετρά όλες τις διατάξεις των 20 ατόμων, ενώ τα παραγοντικά των μεγεθών των ομάδων διορθώνουν για το ότι μέσα σε κάθε ομάδα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των ατόμων.

Φάση Β: Αντιστοίχιση των ομάδων στα ταξί.

Τα ταξί είναι διαφορετικά: 5 ταξί χωρητικότητας 2 ατόμων και 2 ταξί χωρητικότητας 5 ατόμων. Καθώς **έχουμε ήδη θεωρήσει τις ομάδες ως διατεταγμένες**, η απευθείας αντιστοίχιση κάθε ομάδας στο αντίστοιχο ταξί (μία ομάδα μεγέθους 2 σε κάθε ταξί χωρητικότητας 2 και μία ομάδα μεγέθους 5 σε κάθε ταξί χωρητικότητας 5) δεν αλλάζει τον αριθμό των τρόπων. Έτσι ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι πάλι:

$$T = \frac{20!}{2!^5 \cdot 5!^2}.$$

Οι δύο μέθοδοι είναι συνεπείς μεταξύ τους και δίνουν τον ίδιο αριθμό τρόπων, όπως αναμένεται.

Λύση 2: Πρώτα χωρίζουμε σε ομάδες και μετά τα βάζουμε στα ταξί

Τώρα θα δώσουμε μια εναλλακτική λύση, όπου πρώτα χωρίζουμε τα 20 άτομα σε ομάδες και στη συνέχεια αντιστοιχίζουμε τις ομάδες στα ταξί.

Θέλουμε 5 ομάδες των 2 ατόμων και 2 ομάδες των 5 ατόμων. Αν θεωρήσουμε ότι οι ομάδες είναι διατεταγμένες (δηλαδή ξεχωρίζουμε ποια είναι η πρώτη, ποια η δεύτερη κτλ.), τότε ο αριθμός των τρόπων να χωρίσουμε τα 20 άτομα σε ομάδες με μεγέθη **2,2,2,2,2,5,5** είναι ο πολυωνυμικός συντελεστής:

$$\frac{20!}{2!^5 5!^2}.$$

Όμως, αν θέλουμε οι ομάδες να είναι μη διατεταγμένες και επιπλέον όλες οι δυάδες να θεωρούνται ίδιες μεταξύ τους και όλες οι πεντάδες ίδιες μεταξύ τους, τότε ο αριθμός των μη διατεταγμένων ομαδοποιήσεων είναι:

$$N_1 = \frac{20!}{2!^5 5!^2 5!2!}.$$

Στη συνέχεια θα αντιστοιχίσουμε αυτές τις ομάδες στα συγκεκριμένα ταξί.

♦ Υπάρχουν 5 διαφορετικά ταξί των 2 θέσεων και 5 μη διατεταγμένες δυάδες, οπότε οι δυάδες μπορούν να αντιστοιχιστούν στα ταξί με $5!$ τρόπους.

♦ Υπάρχουν επίσης 2 διαφορετικά ταξί των 5 θέσεων και 2 μη διατεταγμένες πεντάδες, οπότε οι πεντάδες μπορούν να αντιστοιχιστούν στα ταξί με $2!$ τρόπους.

Επομένως οι τρόποι αντιστοίχισης ομάδων στα ταξί είναι $5! \cdot 2!$ και ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:

$$N = N_1 \cdot 5! \cdot 2! = \frac{20!}{2!^5 5!^2 5!2!} \cdot 5! \cdot 2! = \frac{20!}{2!^5 5!^2}.$$

Άρα, όπως και στην πρώτη λύση, ο τελικός αριθμός τρόπων είναι:

$$N = \frac{20!}{2!^5 5!^2}.$$

Λύση 3**Πρώτα χωρίζουμε σε ομάδες και μετά βάζουμε στα ταξί**

Τώρα θα δώσουμε μια εναλλακτική λύση, όπου πρώτα χωρίζουμε τα 20 άτομα σε ομάδες και στη συνέχεια αντιστοιχίζουμε τις ομάδες στα ταξί.

Θέλουμε 5 ομάδες των 2 ατόμων και 2 ομάδες των 5 ατόμων. Αν θεωρήσουμε ότι οι ομάδες είναι διατεταγμένες (δηλαδή ξεχωρίζουμε ποια είναι η πρώτη, ποια η δεύτερη κτλ.), τότε ο αριθμός των τρόπων να χωρίσουμε τα 20 άτομα σε ομάδες με μεγέθη **2,2,2,2,5,5** είναι ο πολωνυμικός συντελεστής:

$$\frac{20!}{2!^5 5!^2}.$$

Όμως, αν θέλουμε οι ομάδες να είναι μη διατεταγμένες και επιπλέον όλες οι δυάδες να θεωρούνται ίδιες μεταξύ τους και όλες οι πεντάδες ίδιες μεταξύ τους, τότε ο αριθμός των μη διατεταγμένων ομαδοποιήσεων είναι:

$$N_1 = \frac{20!}{2!^5 5!^2 5!2!}.$$

Στη συνέχεια θα αντιστοιχίσουμε αυτές τις ομάδες στα συγκεκριμένα ταξί.

♦ Υπάρχουν 5 διαφορετικά ταξί των 2 θέσεων και 5 μη διατεταγμένες δυάδες, οπότε οι δυάδες μπορούν να αντιστοιχιστούν στα ταξί με $5!$ τρόπους.

♦ Υπάρχουν επίσης 2 διαφορετικά ταξί των 5 θέσεων και 2 μη διατεταγμένες πεντάδες, οπότε οι πεντάδες μπορούν να αντιστοιχιστούν στα ταξί με $2!$ τρόπους.

Επομένως οι τρόποι αντιστοίχισης ομάδων στα ταξί είναι $5! \cdot 2!$ και ο συνολικός αριθμός τρόπων είναι:

$$N = N_1 \cdot 5! \cdot 2! = \frac{20!}{2!^5 5!^2 5!2!} \cdot 5! \cdot 2! = \frac{20!}{2!^5 5!^2}.$$

Άρα, όπως και στην πρώτη λύση, ο τελικός αριθμός τρόπων είναι:

$$N = \frac{20!}{2!^5 5!^2}.$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 9

Προσθήκη 10

11-12-2025

Στην προσθήκη αυτή δίνουμε τα ΠΜΑ και τις δραστηριότητες που προτείνει το πρόγραμμα σπουδών (ΠΣ). Ακριβώς πάνω σε αυτές τις οδηγίες και πληροφορίες θα βασιστούν οι συγγραφικές ομάδες για τη δημιουργία των νέων σχολικών βιβλίων και συγκριμένα για το βιβλίο :

Στοχαστικά Μαθηματικά, Β' Λυκείου.

Αυτή τη στιγμή που γράφουμε την προσθήκη, έχει κλείσει πριν από έναν μήνα η πλατφόρμα υποβολής βιβλίων. Αυτό σημαίνει ότι ή ότι μέσα στην προκαθαρισμένη ημερομηνία είχαν υποβληθεί τουλάχιστον δύο βιβλία Στοχαστικών Μαθηματικών στην Β' Λυκείου ή ότι το νέο βιβλίο θα δημιουργηθεί με ανάθεση από το ΙΕΠ, όπως προβλέπει δηλαδή το σχετικό ΦΕΚ. Πιθανόν όμως να δοθούν νέες ημερομηνίες συγγραφής και υποβολής των βιβλίων για την Β και τη Γ Λυκείου. Ίδωμεν!

Από το νέο Π.Σ.

Στοχαστικά Μαθηματικά-Πιθανότητες – Β Λυκείου

Α. Τα ΠΜΑ σύμφωνα με το Πρόγραμμα σπουδών

Β' Λυκείου

Μαθησιακοί στόχοι (Π.Π.11.1 – Π.Π.11.4)

Π.Π.11 – Διατάξεις, μεταθέσεις, συνδυασμοί

Π.Π.11.1. Εξηγούν τους τρόπους υπολογισμού διατάξεων με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεων και συνδυασμών.

Π.Π.11.2. Υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων ενδεχομένων με χρήση αρχών απαρίθμησης.

Π.Π.11.3. Επιλέγουν το κατάλληλο πλαίσιο συνδυαστικών μεθόδων σε κάθε πρόβλημα.

Π.Π.11.4. Χρησιμοποιούν τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς στη μοντελοποίηση και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Δραστηριότητες – βασικές δεξιότητες

- Υπολογισμός του πλήθους των στοιχείων ενδεχομένων με τη χρήση των αρχών απαρίθμησης.
- Επίλυση απλών πραγματικών προβλημάτων χρησιμοποιώντας τις διατάξεις με και χωρίς επαναλήψεις, μεταθέσεις και συνδυασμούς.

Β. Οι προτεινόμενες δραστηριότητες

Παράδειγμα 1

Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;

- (α) να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη ή
 (β) να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο ότι ο κωδικός περιοχής του/της είναι 210 και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά ψηφία στην τύχη;

Λύση

(α) Πιθανότητα να κερδίσουμε το τζακ-ποτ στο τζόκερ με μία στήλη.

Στο τζόκερ επιλέγουμε 5 αριθμούς από το 1 έως το 45 και έναν επιπλέον αριθμό τζόκερ από το 1 έως το 20.

Ο συνολικός αριθμός δυνατών στηλών είναι

$$N = C(45, 5) \cdot 20.$$

Μόνο μία από αυτές τις στήλες είναι η νικητήρια.

Άρα η πιθανότητα να κερδίσουμε το τζακ-ποτ με μία στήλη είναι

$$P_{\text{TZOK}} = \frac{1}{C(45, 5) \cdot 20}.$$

Γνωρίζουμε ότι $C(45, 5) \cdot 20 = 24435180$, οπότε

$$P_{\text{TZOK}} = \frac{1}{24435180}.$$

(β) Πιθανότητα να σχηματίσουμε σωστά τον αριθμό τηλεφώνου.

Γνωρίζουμε ότι ο κωδικός περιοχής είναι 210 και απομένουν 7 ψηφία, καθένα από τα οποία μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα 10 ψηφία 0–9.

Άρα ο συνολικός αριθμός δυνατών 7-ψηφίων ακολουθιών είναι 10^7 .

Υποθέτουμε ότι ο φίλος μας έχει έναν συγκεκριμένο αριθμό τηλεφώνου με αυτόν τον κωδικό περιοχής, οπότε μόνο ένας από τους 10^7 αριθμούς είναι ο σωστός.

Επομένως η πιθανότητα να καλέσουμε τυχαία τον σωστό αριθμό είναι

$$P_{\text{THΛ}} = \frac{1}{10^7}.$$

Σύγκριση:

Έχουμε τις δύο πιθανότητες:

$$P_{\text{THΛ}} = \frac{1}{10^7} \text{ και } P_{\text{TZOK}} = \frac{1}{24435180}.$$

Επειδή $24435180 > 10000000$, ισχύει

$$\frac{1}{24435180} < \frac{1}{10^7}.$$

Άρα $P_{\text{TZOK}} < P_{\text{THΛ}}$, δηλαδή είναι πιθανότερο να καλέσουμε σωστά τον φίλο ή τη φίλη μας παρά να κερδίσουμε το τζόκερ με μία στήλη.

Παράδειγμα 2

Δέκα μαθητές και μαθήτριες θα παραταχθούν σε ευθεία γραμμή.

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η παράταξη των μαθητών;
 (β) Με πόσους τρόπους μπορούν δύο συγκεκριμένοι μαθητές ή μαθήτριες να παραταχθούν σε συνεχόμενες θέσεις;
 (γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου δύο συγκεκριμένοι μαθητές ή μαθήτριες να παραταχθούν σε συνεχόμενες θέσεις.

Λύση

(α) Θεωρούμε ότι όλοι οι δέκα μαθητές είναι διακριτοί. Κάθε διάταξη των 10 μαθητών σε σειρά είναι μία μετάθεση των 10 στοιχείων.

Ο αριθμός όλων των δυνατών παρατάξεων είναι $N = 10!$.

(β) Θέλουμε δύο συγκεκριμένοι μαθητές, έστω A και B , να βρίσκονται σε συνεχόμενες θέσεις. Σκεφτόμαστε το ζεύγος (A, B) ως ένα «μπλοκ».

- Υπάρχουν $2!$ τρόποι να σταθούν μεταξύ τους μέσα στο μπλοκ.
- Το μπλοκ αυτό, μαζί με τους υπόλοιπους 8 μαθητές, δίνει συνολικά 9 αντικείμενα προς διάταξη σε σειρά.

Άρα ο αριθμός των ευνοϊκών διατάξεων είναι

$$N_2 = 2! \cdot 9! = 2 \cdot 9!.$$

(γ) Η πιθανότητα να σταθούν οι δύο συγκεκριμένοι μαθητές σε συνεχόμενες θέσεις είναι

$$P = \frac{N_2}{N} = \frac{2 \cdot 9!}{10!}.$$

Επειδή $10! = 10 \cdot 9!$, παίρνουμε $P = \frac{2 \cdot 9!}{10 \cdot 9!} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$

Άρα η πιθανότητα οι δύο συγκεκριμένοι μαθητές να σταθούν σε συνεχόμενες θέσεις είναι $1/5$.

Παράδειγμα 3

Τρεις ορειβάτες θα καταλύσουν στα πέντε ξενοδοχεία του χωριού Αρίστη στον νομό Ιωαννίνων.

(α) Με πόσους τρόπους μπορούν να φιλοξενηθούν στα πέντε ξενοδοχεία;

(β) Με πόσους τρόπους μπορούν να φιλοξενηθούν, αν πρέπει να φιλοξενηθούν σε διαφορετικά ξενοδοχεία;

(γ) Να βρείτε την πιθανότητα οι ορειβάτες να φιλοξενηθούν σε διαφορετικά ξενοδοχεία.

Λύση

Θεωρούμε ότι οι τρεις ορειβάτες είναι διακριτά πρόσωπα και τα πέντε ξενοδοχεία είναι επίσης διακριτά.

(α) Κάθε ορειβάτης έχει 5 επιλογές ξενοδοχείου, ανεξάρτητα από τους άλλους.

Άρα ο συνολικός αριθμός δυνατών τρόπων φιλοξενίας είναι

$$N = 5^3 = 125.$$

(β) Τώρα θέλουμε και οι τρεις ορειβάτες να μείνουν σε διαφορετικά ξενοδοχεία.

Επιλέγουμε για τον πρώτο ορειβάτη ένα από τα 5 ξενοδοχεία, για τον δεύτερο ένα από τα εναπομείναντα 4 και για τον τρίτο ένα από τα 3 που απομένουν.

Άρα ο αριθμός των ευνοϊκών τρόπων είναι

$$N_{\text{diag}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

(γ) Η πιθανότητα οι τρεις ορειβάτες να φιλοξενηθούν σε διαφορετικά ξενοδοχεία είναι

$$P = \frac{N_{\text{diag}}}{N} = \frac{60}{125} = \frac{12}{25}.$$

Παράδειγμα 4

Η εταιρεία «Senior Model» θα προσλάβει 4 υπαλλήλους. Έκαναν αίτηση 5 άνδρες και 7 γυναίκες.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(α) να προσληφθούν 2 άνδρες και 2 γυναίκες,

(β) να προσληφθούν τουλάχιστον 3 γυναίκες,

(γ) να προσληφθεί η κ. Ιφιγένεια που έκανε αίτηση.

Λύση

Ο συνολικός αριθμός τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε 4 άτομα από τα 12 (5 άνδρες και 7 γυναίκες) είναι $N = C(12, 4)$.

(α) Θέλουμε 2 άνδρες και 2 γυναίκες.

- Επιλέγουμε 2 άνδρες από τους 5: $C(5, 2)$ τρόποι.

- Επιλέγουμε 2 γυναίκες από τις 7: $C(7, 2)$ τρόποι.

Με τον κανόνα του γινομένου, ο αριθμός των ευνοϊκών τρόπων είναι

$$N_{2a2g} = C(5, 2) \cdot C(7, 2).$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P_{2a-2g} = \frac{C(5, 2) \cdot C(7, 2)}{C(12, 4)}.$$

Υπολογίζουμε:

$$C(5, 2) = 10, \quad C(7, 2) = 21, \quad C(12, 4) = 495.$$

Επομένως

$$P_{2a-2g} = \frac{10 \cdot 21}{495} = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}.$$

(β) Θέλουμε να προσληφθούν τουλάχιστον 3 γυναίκες.

Άρα οι δυνατοί συνδυασμοί είναι:

- 3 γυναίκες και 1 άνδρας,
- 4 γυναίκες και 0 άνδρες.

Για 3 γυναίκες και 1 άνδρα:

- Επιλέγουμε 3 γυναίκες από 7: $C(7, 3)$ τρόποι.
- Επιλέγουμε 1 άνδρα από 5: $C(5, 1)$ τρόποι.

Άρα

$$N_{3g-1a} = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{1}.$$

Για 4 γυναίκες:

- Επιλέγουμε 4 γυναίκες από 7: $C(7, 4)$ τρόποι.
- Δεν επιλέγουμε κανέναν άνδρα: $C(5, 0) = 1$ τρόπος.

Άρα

$$N_{4g} = \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{0}.$$

Ο συνολικός αριθμός ευνοϊκών τρόπων είναι

$$N_1 = N_{3g-1a} + N_{4g} = \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{1} + \binom{7}{4} \cdot \binom{5}{0}.$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{N_1}{N}.$$

Υπολογίζουμε:

$$C(7, 3) = 35, \quad C(5, 1) = 5, \quad C(7, 4) = 35, \quad C(5, 0) = 1.$$

Επομένως

$$N_{3g-1a} = 35 \cdot 5 = 175, \quad N_{4g} = 35 \cdot 1 = 35, \quad N_1 = 175 + 35 = 210.$$

Άρα

$$P = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}.$$

(γ) Πιθανότητα να προσληφθεί η κ. Ιφιγένεια.

Θεωρούμε ότι η κ. Ιφιγένεια είναι μία από τις 7 γυναίκες.

Για να περιέχεται η Ιφιγένεια στην τετράδα των προσληφθέντων, την «κλειδώνουμε» στη θέση της και επιλέγουμε τα υπόλοιπα 3 άτομα από τους 11 εναπομείναντες υποψηφίους.

Ο αριθμός των τρόπων επιλογής τετράδας που περιέχει την Ιφιγένεια είναι

$$N_{I\varphi} = C(11, 3).$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P_{I\varphi} = \frac{N_{I\varphi}}{N} = \frac{C(11, 3)}{C(12, 4)}.$$

Υπολογίζουμε $C(11, 3) = 165$, $C(12, 4) = 495$, οπότε

$$P_{I\varphi} = \frac{165}{495} = \frac{1}{3}.$$

Άρα η πιθανότητα να προσληφθεί η κ. Ιφιγένεια είναι $\frac{1}{3}$.

Η λύσεις έγιναν αρχικά από την ΑΙ.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 10

Προσθήκη 11**12-12-2025****Ολυμπιακοί αγώνες Κωπηλασίας !****Επιλέγουμε την ομάδα για την οκτάκωπο****Πρόβλημα 1**

Η Εθνική ομάδα διαθέτει για το αγώνισμα της οκτακώπου 12 αθλητές. Οι 3 από αυτούς είναι αριστερόχειρες και μπορούν να βρεθούν μόνο στην αριστερή πλευρά. Οι υπόλοιποι μπορούν να πάρουν κάθε θέση κωπηλάτη στο σκάφος. Ο προπονητής θέλει να επιλέξει για τη στελέχωση της ομάδας 8 κωπηλάτες. Με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι δύο πλευρές του σκάφους, αν :

- (α) Στην ομάδα μπούνε και οι 3 αριστερόχειρες.
- (β) Στην ομάδα μπούνε 2 ακριβώς αριστερόχειρες,
- (γ) Στην ομάδα μπει το πολύ ένας αριστερόχειρας.
- (δ) Με πόσους τρόπους γίνεται στην κάθε περίπτωση ο σχηματισμός της ομάδας, αν ενδιαφέρει και η θέση που θα πάρει ο κάθε αθλητής ;

Λύση

(α) Θεωρούμε τους 3 κωπηλάτες που μπορούν να κωπηλατούν μόνο αριστερά ως τύπου Α και τους 9 υπόλοιπους κωπηλάτες, που μπορούν να κωπηλατούν και στις δύο πλευρές, ως τύπου F.

Οι 3 τύπου Α είναι οπωσδήποτε στην ομάδα των 8 και θα τοποθετηθούν υποχρεωτικά στην αριστερή πλευρά (Α). Επομένως η ομάδα των 8 αποτελείται από 3 Α και 5 F.

Στην αριστερή τετράδα πρέπει να βρίσκονται οι 3 Α και 1 F, ενώ στη δεξιά τετράδα θα βρίσκονται οι άλλοι 4 F.

Δεν ενδιαφέρει η εσωτερική διάταξη

1. Επιλέγουμε ποιος από τους 9 κωπηλάτες τύπου F θα πάει στην αριστερή πλευρά μαζί με τους 3 Α.

Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{9}{1}$ τρόπους.

2. Από τους εναπομείναντες 8 κωπηλάτες τύπου F επιλέγουμε τους 4 που θα πάνε στη δεξιά πλευρά. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{8}{4}$ τρόπους.

Οι υπόλοιποι 4 κωπηλάτες τύπου F δεν συμμετέχουν στο πλήρωμα.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων κατανομής, χωρίς να μας ενδιαφέρει η εσωτερική διάταξη στις θέσεις, είναι $N_\alpha = \binom{9}{1} \binom{8}{4}$

Αριθμητικά έχουμε

$$\binom{9}{1} = 9, \quad \binom{8}{4} = 70,$$

οπότε

$$N_\alpha = 9 \cdot 70 = 630.$$

(β) Θέλουμε μόνο 2 A. Επιλέγουμε λοιπόν 2 A από τους 3 με $\binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3$ τρόπους. Έχει μείνει ένας A και οι 9 F από τους άλλους. Από τους 9 επιλέγουμε 2 με $\binom{9}{2}$ τρόπους και τους 4 της άλλης πλευράς από τους 7 που απέμειναν με $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ τρόπους.

Στην περίπτωση αυτή λοιπόν έχουμε $\binom{3}{1} \binom{9}{2} \binom{7}{4}$ τρόπους για να σχηματίσουμε την ομάδα.

(γ) Εδώ θα έχουμε ή 1 A ή 0 A, δηλαδή η ομάδα ή έχει έναν ή Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε τον έναν A από τους 3 με $\binom{3}{1} = 3$ τρόπους. Έχουν μείνει 2 A και οι 9 F από τους άλλους. Από τους 9 επιλέγουμε 3 με $\binom{9}{3}$ τρόπους και τους 4 της άλλης πλευράς από τους 7 που απέμειναν με $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$ τρόπους.

Στην περίπτωση αυτή λοιπόν έχουμε $\binom{3}{1} \binom{9}{3} \binom{6}{4}$ τρόπους για να σχηματίσουμε την ομάδα.

Αν τώρα δεν υπάρχει κανένας A στην ομάδα, δεν μένει παρά να πάρουμε 4 από τους 9 για τη μία πλευρά και 4 από τους 5 για την άλλη. Αυτό γίνεται με $\binom{9}{4} \binom{5}{4}$ τρόπους. Δεν διαιρούμε με 2 γιατί έχει σημασία από ποια μεριά θα πάνε οι δύο αυτές τετράδες.

Από την προσθετική αρχή θα πάρουμε $\binom{3}{2} \binom{9}{3} \binom{6}{4} + \binom{9}{4} \binom{5}{4} = 4410$ περιπτώσεις.

(δ) Ενδιαφέρει η θέση κάθε κωπηλάτη

Τώρα, εκτός από το ποιος είναι στην αριστερή και ποιος στη δεξιά πλευρά, μας ενδιαφέρει και η διάταξη των κωπηλατών στις τέσσερις αριθμημένες θέσεις κάθε πλευράς.

Αυτό όμως θα προκύψει αν την κάθε περίπτωση την πολλαπλασιάσουμε με $4!4!$, αφού στην κάθε πλευρά οι 4 αθλητές εναλλάσσονται με $4!$ τρόπους.

Ας δούμε μόνο την περίπτωση (α). Έχουμε ήδη βρει ότι υπάρχουν $N_{\alpha} = 630$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε ποιοι 4 θα είναι στην πλευρά Α (3 Α και 1 F) και ποιοι 4 θα είναι στην πλευρά Δ (4 F).

Για κάθε τέτοια επιλογή:

- Οι 4 κωπηλάτες της αριστερής πλευράς μπορούν να τοποθετηθούν στις 4 θέσεις με $4!$ τρόπους.
- Οι 4 κωπηλάτες της δεξιάς πλευράς μπορούν επίσης να τοποθετηθούν στις 4 θέσεις με $4!$ τρόπους.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων κατανομής, όταν ενδιαφέρει και η θέση κάθε κωπηλάτη, είναι

$$N_{\alpha\delta} = N_{\alpha} \cdot 4! \cdot 4! = \binom{9}{1} \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot 4! = 9!$$

Στις περιπτώσεις (β) και (γ) θα βρούμε $6 \cdot 9!$ και $7 \cdot 9!$ αντίστοιχα.



Αν βρει κάποιος μια φωτογραφία με την Ελληνική ομάδα σε οκτάκωπο, ας μου τη στείλει !

Πρόβλημα 2

Από 12 κωπηλάτες θα επιλεγούν 8 για να αποτελέσουν το πλήρωμα ενός σκάφους (οκτακώπου) που θα πάρει μέρος στους Ολυμπιακούς Αγώνες. Οι 3 από τους 12 κωπηλάτες μπορούν να κωπηλατούν μόνο από την αριστερή πλευρά και είναι οπωσδήποτε και οι 3 στην ομάδα. Οι 8 αθλητές που θα επιλεγούν θα χωριστούν σε 2 τετράδες, αριστερή (Α) και δεξιά (Δ). Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κατανομή των αθλητών, αν:

- (α) δεν ενδιαφέρει ο τρόπος που θα καθίσουν,
 (β) ενδιαφέρει και η θέση που θα καθίσει ο κάθε κωπηλάτης;

Λύση

Η λύση που ακολουθεί είναι σωστή μόνο στην περίπτωση που ενδιαφέρει η κατανομή των αθλητών στις δύο πλευρές και όχι η κατανομή τους στο σκάφος. Για τη δεύτερη περίπτωση δείτε την επόμενη εκφώνηση.

Θεωρούμε τους 3 κωπηλάτες που μπορούν να κωπηλατούν μόνο αριστερά ως τύπου L και τους 9 υπόλοιπους κωπηλάτες, που μπορούν να κωπηλατούν και στις δύο πλευρές, ως τύπου F.

Οι 3 τύπου L είναι οπωσδήποτε στην ομάδα των 8 και θα τοποθετηθούν υποχρεωτικά στην αριστερή πλευρά (Α). Επομένως η ομάδα των 8 αποτελείται από 3 L και 5 F.

Στην αριστερή τετράδα πρέπει να βρίσκονται οι 3 L και 1 F, ενώ στη δεξιά τετράδα θα βρίσκονται οι άλλοι 4 F.

(α) Δεν ενδιαφέρει η εσωτερική διάταξη

1. Επιλέγουμε ποιος από τους 9 κωπηλάτες τύπου F θα πάει στην αριστερή πλευρά μαζί με τους 3 L. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{9}{1}$ τρόπους.

2. Από τους εναπομείναντες 8 κωπηλάτες τύπου F επιλέγουμε τους 4 που θα πάνε στη δεξιά πλευρά. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{8}{4}$ τρόπους.

Οι υπόλοιποι 4 κωπηλάτες τύπου F δεν συμμετέχουν στο πλήρωμα.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων κατανομής, χωρίς να μας ενδιαφέρει η εσωτερική διάταξη στις θέσεις, είναι $N_a = \binom{9}{1} \binom{8}{4}$

Αριθμητικά έχουμε $\binom{9}{1} = 9$, $\binom{8}{4} = 70$, οπότε $N_a = 9 \cdot 70 = 630$.

(β) Ενδιαφέρει η θέση κάθε κωπηλάτη

Τώρα, εκτός από το ποιος είναι στην αριστερή και ποιος στη δεξιά πλευρά, μας ενδιαφέρει και η διάταξη των κωπηλατών στις τέσσερις αριθμημένες θέσεις κάθε πλευράς.

Έχουμε ήδη από το (α) ότι υπάρχουν $N_{\{a\}} = 630$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε ποιοι 4 θα είναι στην πλευρά Α (3 L και 1 F) και ποιοι 4 θα είναι στην πλευρά Δ (4 F).

Για κάθε τέτοια επιλογή:

- Οι 4 κωπηλάτες της αριστερής πλευράς μπορούν να τοποθετηθούν στις 4 θέσεις με 4! τρόπους.
- Οι 4 κωπηλάτες της δεξιάς πλευράς μπορούν επίσης να τοποθετηθούν στις 4 θέσεις με 4! τρόπους.

Άρα ο συνολικός αριθμός τρόπων κατανομής, όταν ενδιαφέρει και η θέση κάθε κωπηλάτη, είναι

$$N_b = N_a \cdot 4! \cdot 4! = N_a = \binom{9}{1} \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot 4!.$$

Αριθμητικά έχουμε

$$N_b = 630 \cdot 24 \cdot 24 = 630 \cdot 576 = 362\,880.$$

Συμπερασματικά είναι : $N_a = 630$ και $N_b = 362\,880$.

Δες πρέπει να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι $N_b = 362\,880 = 9!$

Σχόλιο :

Τίθεται το ερώτημα : Είναι σωστό να επιλέξουμε τον έναν κωπηλάτη που θα συμπληρώσει την αριστερή ομάδα από τους 5 ελεύθερους που θα επιλέξουμε από τους 9 για να συμπληρώσουν τους $1+4=5$ που απομένουν ;

Η απάντηση είναι θετική, διότι

$$\binom{9}{1} \binom{8}{4} = \binom{9}{5} \binom{5}{1} = \frac{9!}{4!4!}$$

Η μορφή αυτή του αποτελέσματος δίνει άμεσα και το πλήθος των τρόπων που οι αθλητές θα πάρουν τις θέσεις τους !

Μια λύση από την ΑΙ

Από το Gemini πήραμε την παρακάτω αντιμετώπιση

📌 Ανάλυση του Προβλήματος

- Σύνολο κωπηλατών: $N = 12$.
- Πλήρωμα που θα επιλεγεί: $K = 8$ (Οκτάκωπος).
- Κωπηλάτες που κωπηλατούν μόνο από την αριστερή πλευρά (Α) και είναι σίγουρα στο πλήρωμα: $A_{\text{μόνο}} = 3$.
- Οι 8 αθλητές θα χωριστούν σε 2 τετράδες: Α (Αριστερή πλευρά) και Δ (Δεξιά πλευρά).
- Συνολικός αριθμός θέσεων στην αριστερή πλευρά (Α): 4.
- Συνολικός αριθμός θέσεων στη δεξιά πλευρά (Δ): 4.

📌 Υπολογισμός των Επιλέξιμων Αθλητών

Από τους 12 κωπηλάτες, οι 3 είναι ήδη επιλεγμένοι και κωπηλατούν μόνο στην Α πλευρά.

- Αριθμός κωπηλατών που απομένουν για επιλογή: $12 - 3 = 9$.
- Αριθμός θέσεων που απομένουν για να συμπληρωθεί το πλήρωμα των 8: $8 - 3 = 5$.
- Οι 9 κωπηλάτες που απομένουν μπορούν να κωπηλατήσουν είτε στην Α είτε στη Δ πλευρά.

(α) Δεν ενδιαφέρει ο τρόπος που θα καθίσουν

Σε αυτή την περίπτωση, μας ενδιαφέρει **μόνο η επιλογή** των 5 επιπλέον αθλητών από τους 9 που απέμειναν και η **κατανομή τους** στις 5 κενές θέσεις (1 στην Α πλευρά και 4 στη Δ πλευρά).

1. **Επιλογή των 5 αθλητών:** Από τους 9 κωπηλάτες που απομένουν, επιλέγουμε 5 για να συμπληρώσουν το πλήρωμα. Αυτό γίνεται με συνδυασμούς, αφού η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία.

$$\text{Τρόποι επιλογής} = \binom{9}{5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

2. Κατανομή των 8 αθλητών στις πλευρές Α και Δ (όχι στις θέσεις):

Τώρα έχουμε τους 8 αθλητές:

- 3 υποχρεωτικοί στην Α πλευρά ($A_{\text{μόνο}}$).
- 5 επιλεγμένοι από τους 9 ($E_{\pi\lambda_5}$).

Πρέπει να συμπληρώσουμε:

- 1 θέση στην Α πλευρά (σύνολο 4: $3 + 1$).
- 4 θέσεις στη Δ πλευρά (σύνολο 4).
- **Σύνολο 5 θέσεων** που πρέπει να καλυφθούν από τους 5 επιλεγμένους ($E_{\pi\lambda_5}$).

Από τους 5 επιλεγμένους αθλητές ($E_{\pi\lambda_5}$), πρέπει να επιλέξουμε τον 1 που θα πάει στην Α πλευρά. Οι υπόλοιποι 4 πάνε στη Δ.

$$\text{Τρόποι κατανομής} = \binom{5}{1} \quad (\text{επιλογή 1 για την Α πλευρά}) = 5$$

(Οι υπόλοιποι $\binom{4}{4} = 1$ τρόπος για την Δ πλευρά).

Συνολικοί τρόποι (α):

$$\text{Συνολικοί Τρόποι} = (\text{Τρόποι επιλογής}) \times (\text{Τρόποι κατανομής}) = 126 \times 5 = 630$$

(β) Ενδιαφέρει και η θέση που θα καθίσει ο κάθε κωπηλάτης

Σε αυτή την περίπτωση, η σειρά έχει σημασία, άρα χρησιμοποιούμε μεταθέσεις. Έχουμε 2 ανεξάρτητα βήματα: την επιλογή των 5 αθλητών και την τοποθέτησή τους στις θέσεις (μαζί με τους 3 υποχρεωτικούς).

1. **Επιλογή των 5 αθλητών:** Όπως και πριν, επιλέγουμε 5 από τους 9:

$$\text{Τρόποι επιλογής} = \binom{9}{5} = 126$$

2. **Τοποθέτηση των 8 αθλητών στις θέσεις:** Τώρα έχουμε τους 8 αθλητές (3 υποχρεωτικούς + 5 επιλεγμένους) και πρέπει να τους τοποθετήσουμε στις **8 θέσεις** (4 στην Α και 4 στη Δ).

- **Τοποθέτηση στην Α πλευρά:** Έχουμε 4 θέσεις. Πρέπει να τοποθετήσουμε τους 3 υποχρεωτικούς ($A_{\text{μόνο}}$) και τον 1 που επιλέχθηκε να πάει στην Α πλευρά (Επιλ_A). Οι $A_{\text{μόνο}}$ είναι **πάντα** στην Α πλευρά, και ο Επιλ_A είναι ο 4ος. Από τους 5 επιλεγμένους (Επιλ_5), επιλέγουμε τον 1 που θα πάει στην Α πλευρά ($\binom{5}{1} = 5$ τρόποι). Οι 4 αθλητές της Α πλευράς (3 $A_{\text{μόνο}}$ + 1 Επιλ_A) μπορούν να μετατεθούν στις 4 θέσεις της Α πλευράς με $P(4) = 4!$ τρόπους.

$$\text{Τρόποι τοποθέτησης Α} = \binom{5}{1} \times 4! = 5 \times 24 = 120$$

- **Τοποθέτηση στη Δ πλευρά:** Οι υπόλοιποι 4 αθλητές (οι 4 που απέμειναν από τους Επιλ_5) θα τοποθετηθούν στις 4 θέσεις της Δ πλευράς. Αυτό γίνεται με $P(4) = 4!$ τρόπους.

$$\text{Τρόποι τοποθέτησης Δ} = 4! = 24$$

- **Συνολικοί τρόποι τοποθέτησης:**

$$\text{Τρόποι Τοποθέτησης} = (\text{Τρόποι τοποθέτησης Α}) \times (\text{Τρόποι τοποθέτησης Δ}) =$$

Συνολικοί τρόποι (β):

$$\text{ικοί Τρόποι} = (\text{Τρόποι επιλογής}) \times (\text{Τρόποι τοποθέτησης}) = 126 \times 2880 = 362880$$

Αποτελέσματα

- (α) Δεν ενδιαφέρει ο τρόπος που θα καθίσουν (μόνο η πλευρά): **630** τρόποι.
- (β) Ενδιαφέρει και η θέση που θα καθίσει ο κάθε κωπηλάτης: **362.880** τρόποι.

Πρόβλημα 3

Οκτάκωπος — Επιλογή πληρώματος και θέσεις

Η Εθνική ομάδα διαθέτει για το αγώνισμα της οκτακώπου 12 αθλητές. Οι 3 από αυτούς είναι αριστερόχειρες και μπορούν να βρεθούν μόνο στην αριστερή πλευρά. Οι υπόλοιποι μπορούν να πάρουν κάθε θέση κωπηλάτη στο σκάφος. Ο προπονητής θέλει να επιλέξει για τη στελέχωση της ομάδας 8 κωπηλάτες.

Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγεί το πλήρωμα του σκάφους, αν:

- (α) Στην ομάδα μούνε και οι 3 αριστερόχειρες.
- (β) Στην ομάδα μούνε 2 ακριβώς αριστερόχειρες,
- (γ) Στην ομάδα μπει το πολύ ένας αριστερόχειρας.
- (δ) Με πόσους τρόπους γίνεται στην κάθε περίπτωση ο σχηματισμός της ομάδας, αν ενδιαφέρει και η θέση που θα πάρει ο κάθε αθλητής;

Λύση

Σε αυτή την εκδοχή μας ενδιαφέρει η στελέχωση της ομάδας και όχι με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστούν και οι δύο πλευρές τους σκάφους. Αυτό έγινε στο πρώτο πρόβλημα. Πρόκειται για διαφορετικά προβλήματα.

Θέτουμε:

- L : οι 3 αριστερόχειρες (μπορούν μόνο αριστερά).
- B : οι υπόλοιποι 9 (μπορούν οπουδήποτε).
- Το σκάφος έχει 8 διακεκριμένες θέσεις: 4 αριστερά (Α) και 4 δεξιά (Δ).

(α) Στην ομάδα μπαίνουν και οι 3 αριστερόχειρες

Επιλογή πληρώματος (χωρίς θέσεις)

Παίρνουμε όλους τους 3 από L και άλλους 5 από τους 9 του B :

$$N_{(a)} = \binom{9}{5} = 126$$

(α-δ) Αν ενδιαφέρει και η θέση

Από τους 5 του B , 1 θα πάει αριστερά (για να συμπληρώσει την τετράδα Α) και οι άλλοι 4 δεξιά.

$$N_{(a-\delta)} = \binom{9}{5} \binom{5}{1} \cdot 4! \cdot 4! = 9! = 362880$$

(β) Στην ομάδα μπαίνουν ακριβώς 2 αριστερόχειρες

Επιλογή πληρώματος (χωρίς θέσεις)

$$N_{(\beta)} = \binom{3}{2} \binom{9}{6} = 3 \cdot 84 = 252$$

(β-δ) Αν ενδιαφέρει και η θέση

Στην αριστερή πλευρά πρέπει να καθίσουν οι 2 αριστερόχειρες και ακόμη 2 από τους 6 του B .

$$N_{(\beta-\delta)} = \binom{3}{2} \binom{9}{6} \binom{6}{2} \cdot 4! \cdot 4! = 2,177,280$$

(γ) Στην ομάδα μπαίνει το πολύ ένας αριστερόχειρας

Επιλογή πληρώματος (χωρίς θέσεις)

♦ 0 αριστερόχειρες: $\binom{9}{8} = 9$

♦ 1 αριστερόχειρας: $\binom{3}{1} \binom{9}{7} = 3 \cdot 36 = 108$

Άρα συνολικά θα είναι :

$$N_{(\gamma)} = \binom{9}{8} + \binom{3}{1} \binom{9}{7} = 9 + 108 = 117$$

(γ-δ) Αν ενδιαφέρει και η θέση

0 αριστερόχειρες: επιλέγουμε 8 από τους 9 και τους βάζουμε στις 8 θέσεις:

$$N_{(\gamma-0)} = \binom{9}{8} \cdot 8! = 9 \cdot 8! = 9! = 362880$$

1 αριστερόχειρας: στην A πρέπει να κάτσει αυτός + 3 από τους 7 του B :

$$N_{(\gamma-1)} = \binom{3}{1} \binom{9}{7} \binom{7}{3} \cdot 4! \cdot 4! = 2,177,280$$

Σύνολο:

$$N_{(\gamma-\delta)} = 362880 + 2,177,280 = 2,540,160$$

Πρόβλημα 4

Από 12 κωπηλάτες θα επιλεγούν 8. Οι 3 από τους 12 κωπηλατούν από την αριστερή πλευρά. Οι 8 αθλητές θα χωριστούν σε 2 τετράδες, αριστερή (Α) και δεξιά (Δ). Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η κατανομή των αθλητών;

Λύση

Βγάζουμε τους 3 που μπορούν να κωπηλατήσουν μόνο αριστερά (Α) και από τους άλλους 9 διαλέγουμε τους 4 κατά $\binom{9}{4}$ τρόπους να πάνε δεξιά (Δ).

Έχουν μείνει 5 από αυτούς και 3 «αριστερόχειρες», από τους οποίους θα διαλέξουμε τους 4 κατά $\binom{8}{4}$ τρόπους, για να πάνε αριστερά (Α). Οι αθλητές της κάθε ομάδας κάθονται στη πλευρά τους κατά 4! τρόπους.

Συνολικά, λοιπόν, υπάρχουν:

$$\binom{9}{4} \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot 4! = \frac{9!}{4!5!} \cdot \frac{8!}{4!4!} \cdot 4! \cdot 4! = \frac{8!9!}{4!5!} \text{ τρόποι.}$$

Η άποψη της ΑΙ

Οι κωπηλάτες θεωρούνται διακεκριμένοι. Οι 3 «αριστεροί-μόνο» δεν μπορούν να πάνε δεξιά (Δ), ενώ οι υπόλοιποι 9 μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε θέση.

(1) Επιλέγουμε πρώτα τους 4 που θα πάνε στη δεξιά τετράδα (Δ). Αυτοί πρέπει να προέρχονται από τους 9 «ευέλικτους», άρα:

$$\binom{9}{4} \text{ τρόποι.}$$

(2) Αφού επιλεγούν οι 4 της δεξιάς πλευράς, απομένουν συνολικά 8 αθλητές (οι 3 αριστερόχειρες και οι 5 από τους 9 που δεν πήγαν δεξιά). Από αυτούς επιλέγουμε 4 για την αριστερή τετράδα (Α):

$$\binom{8}{4} \text{ τρόποι.}$$

Υπάρχουν λοιπόν $N = \binom{9}{4} \binom{8}{4} = 8820$ τρόποι για την κατανομή των αθλητών, χωρίς να τους βάλουμε όμως σε θέσεις.

(3) Εφόσον ενδιαφέρει και η θέση, οι 4 της αριστερής πλευράς μπορούν να καθίσουν στις 4 αριστερές θέσεις με 4! τρόπους και αντίστοιχα οι 4 της δεξιάς πλευράς στις 4 δεξιές θέσεις με 4! τρόπους.

$$N = \binom{9}{4} \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot 4! = \frac{8!9!}{4!5!}$$

Σύγκριση αποτελεσμάτων

Το αποτέλεσμα της «λύσης εικόνας» και της δικής μου λύσης είναι το ίδιο, αφού και στις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στον τύπο $\frac{8!9!}{4!5!} = 8820 \cdot 4!4! .$

Πρόβλημα 5

Οκτάκωπος – Πιθανότητες αριστερόχειρων (Word+TeX)

Την εκδοχή αυτή πρότεινε ο φίλος Φώτης Δελλαπόρτας –Τον ευχαριστώ!

Η Εθνική ομάδα διαθέτει για το αγώνισμα της οκτακώπου 12 αθλητές. Οι 3 από αυτούς είναι αριστερόχειρες (Α) και μπορούν να βρεθούν μόνο στην αριστερή πλευρά. Οι υπόλοιποι μπορούν να πάρουν κάθε θέση κωπηλάτη στο σκάφος. Ο προπονητής θέλει να επιλέξει 8 κωπηλάτες και να τους τοποθετήσει (4 στις αριστερές θέσεις και 4 στις δεξιές θέσεις). Να βρείτε την πιθανότητα:

(α) Η ομάδα να μην έχει κανένα αριστερόχειρα (Α).

(β) Η ομάδα να έχει 2 αριστερόχειρες (Α).

(γ) Η ομάδα να έχει 3 αριστερόχειρες (Α).

Λύση

Δεδομένα – Μοντέλο πιθανοτήτων

Οι 8 θέσεις του σκάφους θεωρούνται διακεκριμένες: 4 αριστερές και 4 δεξιές. Θεωρούμε ως ισοπίθανες όλες τις έγκυρες τοποθετήσεις 8 αθλητών στις 8 θέσεις, δηλαδή όλες τις αναθέσεις που σέβονται τον περιορισμό ότι οι αριστερόχειρες μπορούν να καθίσουν μόνο στις 4 αριστερές θέσεις.

Βασική απαρίθμηση: πόσες έγκυρες τοποθετήσεις υπάρχουν;

Θα κάνουμε διάκριση ως προς το k , δηλαδή πόσοι αριστερόχειρες συμμετέχουν στο πλήρωμα. Επειδή υπάρχουν 3 αριστερόχειρες συνολικά, έχουμε $k = 0, 1, 2, 3$.

Για δεδομένο k , μετράμε τις έγκυρες τοποθετήσεις σε τέσσερα βήματα:

Βήμα 1: Επιλογή των k αριστερόχειρων από τους 3: $\binom{3}{k}$.

Βήμα 2: Επιλογή των υπολοίπων $8 - k$ αθλητών από τους 9 ευέλκτους: $\binom{9}{8-k}$.

Βήμα 3: Από τους $8 - k$ ευέλκτους που επιλέχθηκαν, επιλέγουμε ποιοι $4 - k$ θα καθίσουν αριστερά (ώστε η αριστερή πλευρά να έχει συνολικά 4 άτομα): $\binom{8-k}{4-k}$.

Βήμα 4: Διάταξη στις θέσεις: αριστερά $4!$ τρόποι και δεξιά $4!$ τρόποι, άρα $4! \cdot 4!$ τρόποι.

Άρα για δεδομένο k :

$$N_k = \binom{3}{k} \binom{9}{8-k} \binom{8-k}{4-k} 4! \cdot 4!$$

Σύνολο έγκυρων τοποθετήσεων

Το σύνολο των έγκυρων τοποθετήσεων είναι:

$$N_{\text{ολ}} = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$$

Ο παράγοντας $4! \cdot 4!$ εμφανίζεται σε όλα τα N_k , άρα θα απλοποιηθεί στις πιθανότητες.

Υπολογισμός των N_k

♦ Για $k = 0$:

$$N_0 = \binom{3}{0} \binom{9}{8} \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot 4!$$

♦ Για $k = 1$:

$$N_1 = \binom{3}{1} \binom{9}{7} \binom{7}{3} \cdot 4! \cdot 4!$$

♦ Για $k = 2$:

$$N_2 = \binom{3}{2} \binom{9}{6} \binom{6}{2} \cdot 4! \cdot 4!$$

♦ Για $k = 3$:

$$N_3 = \binom{3}{3} \binom{9}{5} \binom{5}{1} \cdot 4! \cdot 4!$$

Υπολογισμός του S (χωρίς τον κοινό παράγοντα $4! \cdot 4!$)

Θέτουμε:

$$S = \binom{3}{0} \binom{9}{8} \binom{8}{4} + \binom{3}{1} \binom{9}{7} \binom{7}{3} + \binom{3}{2} \binom{9}{6} \binom{6}{2} + \binom{3}{3} \binom{9}{5} \binom{5}{1}$$

Τότε παίρνουμε: $N_{\text{ολ}} = 4! \cdot 4! \cdot S$.

Υπολογίζουμε τα γινόμενα:

$$\begin{aligned} \diamond \binom{9}{8} \binom{8}{4} &= 9 \cdot 70 = 630, & \binom{3}{1} \binom{9}{7} \binom{7}{3} &= 3 \cdot 36 \cdot 35 = 3780, \\ \diamond \binom{3}{2} \binom{9}{6} \binom{6}{2} &= 3 \cdot 84 \cdot 15 = 3780, & \binom{3}{3} \binom{9}{5} \binom{5}{1} &= 1 \cdot 126 \cdot 5 = 630. \end{aligned}$$

Άρα:

$$S = 630 + 3780 + 3780 + 630 = 8820$$

Πιθανότητες

(α) Κανένα Α

Η ευνοϊκή περίπτωση είναι $k = 0$, οπότε:

$$P(0A) = \frac{N_0}{N_{\text{ολ}}}$$

Απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $4! \cdot 4!$:

$$P(0A) = \frac{\binom{3}{0} \binom{9}{8} \binom{8}{4}}{S} = \frac{\binom{9}{8} \binom{8}{4}}{S}$$

Αντικαθιστούμε:

$$P(0A) = \frac{630}{8820} = \frac{1}{14}$$

(β) Ακριβώς 2Α

Η ευνοϊκή περίπτωση είναι $k = 2$, οπότε:

$$P(2A) = \frac{N_2}{N_{\text{ολ}}}$$

Απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $4! \cdot 4!$:

$$P(2A) = \frac{\binom{3}{2} \binom{9}{6} \binom{6}{2}}{S}$$

Αντικαθιστούμε:

$$P(2A) = \frac{3780}{8820} = \frac{3}{7}$$

(γ) Ακριβώς 3Α

Η ευνοϊκή περίπτωση είναι $k = 3$, άρα:

$$P(3A) = \frac{N_3}{N_{\text{ολ}}}$$

Απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $4! \cdot 4!$:

$$P(3A) = \frac{\binom{3}{3} \binom{9}{5} \binom{5}{1}}{S}$$

Αντικαθιστούμε:

$$P(3A) = \frac{630}{8820} = \frac{1}{14}$$

Τελικές απαντήσεις

$$P(0A) = \frac{1}{14}, \quad P(2A) = \frac{3}{7}, \quad P(3A) = \frac{1}{14}$$

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 11

Προσθήκη 12**12-12-2025****ΠαπουτσωμένοςΔράκος**

Ένας δράκος έχει 4 πόδια. Για κάθε πόδι διαθέτει μία κάλτσα και ένα παπούτσι.
 Η κάλτσα πρέπει να φορεθεί πριν από το αντίστοιχο παπούτσι.
 Με πόσες το πολύ διαφορετικές ακολουθίες κινήσεων μπορεί να ντυθεί ο δράκος;

Λύση

Ο δράκος πρέπει να εκτελέσει συνολικά 4 κινήσεις για τις κάλτσες και 4 κινήσεις για τα παπούτσια, δηλαδή συνολικά 8 κινήσεις.
 Αν δεν υπήρχε κανένας περιορισμός, οι 8 κινήσεις θα μπορούσαν να γίνουν με $8!$ διαφορετικούς τρόπους.

Όμως, για κάθε πόδι ισχύει ο περιορισμός ότι πρώτα μπαίνει η κάλτσα και μετά το αντίστοιχο παπούτσι:

$$\text{κάλτσα} - k_i < \text{παπούτσι} - s_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Για κάθε ζευγάρι (κάλτσα-παπούτσι) υπάρχουν $2!$ δυνατές σειρές, αλλά επιτρέπεται μόνο η μία. Αυτό μας επιβάλλει να διαιρέσουμε με 2 για κάθε πόδι με 2.

Για τα 5 πόδια συνολικά διαιρούμε με 2^4 .

Επομένως ο αριθμός των επιτρεπτών ακολουθιών κινήσεων είναι:

$$N = \frac{8!}{2^4}$$

Ας δούμε και τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Είναι $8! = 40320$ και $2^4 = 16$

Άρα το μέγιστο πλήθος διαφορετικών ενεργειών είναι $N = \frac{40320}{16} = 2520$

Σχόλιο :

Αν ο δράκος βάλει πρώτα όλες τις κάλτσες και μετά τα παπούτσια, τότε θα έχουμε συνολικά $4!4! = 576$ τρόπους.

ΤΕΛΟΣ ΠΡΟΣΘΗΚΗΣ 12